

17 Parabolen

In dit hoofdstuk ga je tweede graadsfuncties bekijken. Dit zijn functies, waarbij de hoogste macht van de onbekende 2 is.

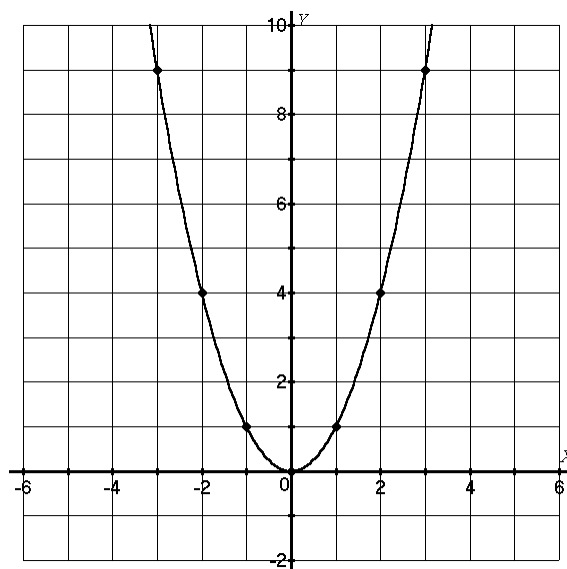
☞ De algemene vorm van een tweede graadsfunctie is:
 ☞ $f(x) = ax^2 + bx + c$ ($a \in \mathbb{R} \wedge a \neq 0$, $b \in \mathbb{R}$, $c \in \mathbb{R}$). De grafiek van deze functie heeft de vergelijking: $y = ax^2 + bx + c$ in een XY -assenstelsel en men noemt dit een *parabool*.

Voorbeeld 17.1

We gaan de meest eenvoudige parabool tekenen. We kiezen in de bovenstaande vergelijking: $a = 1$, $b = 0$ en $c = 0$. Zo ontstaat de vergelijking $y = x^2$. En we berekenen eerst de coördinaten van een aantal punten van de grafiek:

x	-3	-2	-1	0	1	2	3
$y = x^2$	9	4	1	0	1	4	9

Deze punten zetten we uit in een XY -assenstelsel en we trekken een vloeiende kromme door deze punten. (Zie de hiernaast staande grafiek). De vorm van deze grafiek is karakteristiek voor een parabool.



Opdracht 17.1 Teken de grafiek van de parabool met de vergelijking: $y = -x^2$. (Let op de volgorde van uitrekenen: $-x^2 = -1 \cdot x^2$, dus éérst kwadrateren en daarna vermenigvuldigen met -1)

We gaan in tweede graadsfuncties andere waarden voor a , b en c invullen.

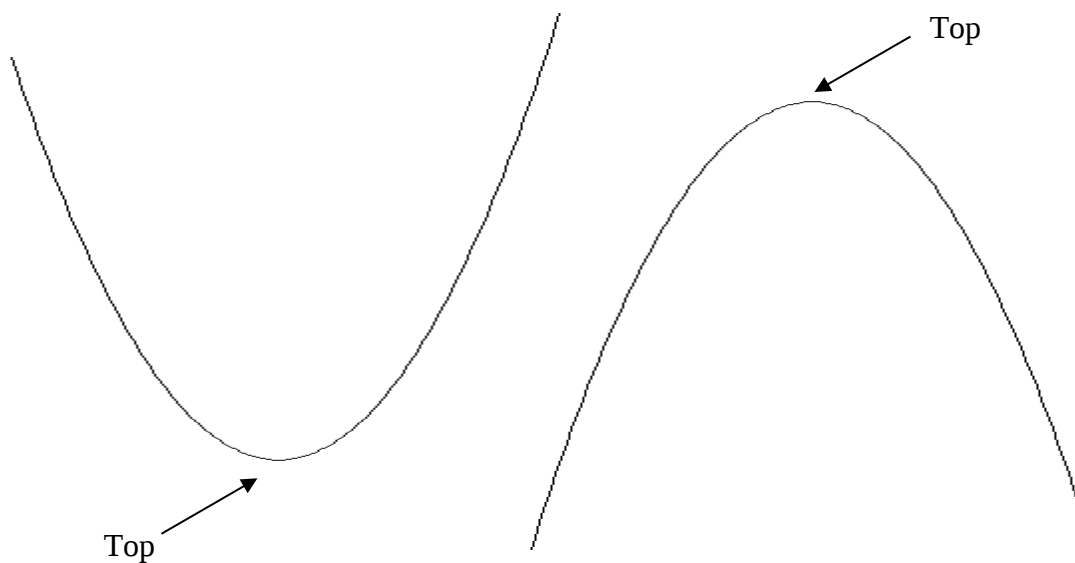
Opdracht 17.2 Teken de grafieken van de onderstaande functies. Achter elk functievoorschrift staan x -coördinaten, waarmee je een aantal punten van de grafiek kunt bepalen. Nadat je de grafiek hebt getekend dien je de snijpunten met de X en de Y -as af te lezen.

- | | |
|-----------------------|---|
| a. $f(x) = x^2 - 1$ | x -coördinaten: $-3, -2, -1, 0, 1, 2, 3$ |
| b. $g(x) = -x^2 + 4$ | x -coördinaten: $-3, -2, -1, 0, 1, 2, 3$ |
| c. $h(x) = x^2 - 4x$ | x -coördinaten: $-1, 0, 1, 2, 3, 4, 5$ |
| d. $k(x) = -x^2 - 2x$ | x -coördinaten: $-4, -3, -2, -1, 0, 1, 2$ |

Opdracht 17.3 Teken de grafieken van de onderstaande functies. Achter elk functievoorschrift staan x -coördinaten, waarmee je een aantal punten van de grafiek kunt bepalen. Nadat je de grafiek hebt getekend dien je de snijpunten met de X en de Y -as af te lezen.

- | | |
|---------------------------|--|
| a. $f(x) = x^2 - 2x - 3$ | x -coördinaten: $-2, -1, 0, 1, 2, 3, 4$ |
| b. $g(x) = x^2 + 2x + 1$ | x -coördinaten: $-4, -3, -2, -1, 0, 1, 2$ |
| c. $h(x) = x^2 + x + 1$ | x -coördinaten: $-3, -2, -1, 0, 1, 2$ |
| d. $k(x) = -x^2 - 4x - 3$ | x -coördinaten: $-5, -4, -3, -2, -1, 0, 1$ |

Zoals je in het voorafgaande hebt kunnen zien kunnen we twee soorten parabolen tegenkomen:



De linkse parabool noem je een *dalparabool* en de rechtse heet een *bergparabool*. Een dalparabool heeft een kleinste y -waarde, je noemt dit een *minimum*. Een bergparabool heeft een grootste y -waarde, je noemt dit een *maximum*. In het algemeen noem je zo'n kleinste of zo'n grootste waarde "*de top van de parabool*". Het soort parabool dat je krijgt wordt bepaald door de waarde van a . We omschrijven dit in regel 17.1.

Regel 17.1 Voor de parabool met de vergelijking:
 $y = ax^2 + bx + c$ ($a \in \mathbb{R} \wedge a \neq 0, b \in \mathbb{R}, c \in \mathbb{R}$) geldt:
 $a > 0 \Rightarrow$ je hebt een dalparabool. De top is een minimum.
 $a < 0 \Rightarrow$ je hebt een bergparabool. De top is een maximum.

Opdracht 17.4 Bepaal het soort parabool van alle grafieken in opdracht 17.2 Geef aan of de top een minimum of een maximum is en lees de coördinaten van de top af.

Opdracht 17.5 Bepaal het soort parabool van alle grafieken in opdracht 17.3 Geef aan of de top een minimum of een maximum is en lees de coördinaten van de top af.

We gaan de snijpunten van de grafiek van een parabool met de Y en de X-as berekenen.

☞ De grafiek van de vergelijking: $y = ax^2 + bx + c$ ($a \in \mathbb{R} \wedge a \neq 0$, $b \in \mathbb{R}$, $c \in \mathbb{R}$) snijdt in een XY-assenstelsel de Y-as in het punt met de coördinaten: $(0, c)$.

Toelichting:

Dit is niet moeilijk om in te zien, want op de Y-as geldt: $x = 0$ (zie ook hoofdstuk 10).

Daarom: $x = 0 \Rightarrow y = a \cdot 0^2 + b \cdot 0 + c = c$. Zo vind je het punt met de coördinaten: $(0, c)$.

Opdracht 17.6 Controleer in de opdrachten 17.2 en 17.3 dat het snijpunt van de grafiek met de Y-as inderdaad het punt $(0, c)$ is.

Het bepalen van het (de) snijpunt(en) met de X-as gaat in het algemeen als volgt:

voor de punten op de X-as geldt: $y = 0$, daarom: $y = 0 \Rightarrow ax^2 + bx + c = 0$. Je hebt hier een tweede graadsvergelijking gevonden. Dit type vergelijking wordt ook veelvuldig een *kwadratische vergelijking* of een *vierkantsvergelijking* genoemd.

Voor het oplossen van een vierkantsvergelijking bestaan in het algemeen twee methoden:

- a. via ontbinden in factoren
- b. via de “abc-formule”

We bestuderen beide methoden.

Oplossen vierkantsvergelijking via ontbinden in factoren

Nadat je de vierkantsvergelijking ontbonden hebt in factoren (zie hoofdstuk 16), maak je gebruik van de volgende zeer belangrijke regel:

Regel 17.2 $a \cdot b = 0 \Leftrightarrow a = 0 \vee b = 0$

Toelichting:

1. Als de uitkomst van een product nul is, dan moet minimaal één van de factoren nul zijn. Ze mogen natuurlijk ook beide nul zijn, maar dit is niet verplicht. Om deze reden gebruiken we in de regel het *of* (“ $\vee$ ”) symbool en niet het *en* (“ $\wedge$ ”) symbool.
2. Deze eigenschap is *uniek* voor de uitkomst “ $= 0$ ”. Ga voor jezelf na dat bijvoorbeeld **niet** geldt: $a \cdot b = 4 \Leftrightarrow a = 4 \vee b = 4$

Opdracht 17.7 Bestudeer de voorbeelden 16.9, 16.10 en opdracht 16.13 opnieuw (zie hoofdstuk 16). Hetgeen daar geschreven is, gaan we opnieuw toepassen.

Voorbeeld 17.2

Bepaal de snijpunten van de grafiek met de vergelijking $y = x^2 - 11x + 24$ met de X -as. Je gaat als volgt te werk (voor het ontbinden in factoren zie voorbeeld 10.9):

$$y = 0 \Rightarrow x^2 - 11x + 24 = 0 \Leftrightarrow (x - 3)(x - 8) = 0 \stackrel{\text{regel 16.2}}{\Leftrightarrow} (x - 3) = 0 \vee (x - 8) = 0 \\ \Leftrightarrow x = 3 \vee x = 8$$

De snijpunten met de X -as hebben de coördinaten (3, 0) en (8, 0).

Toelichting:

Het product: $(x - 3)(x - 8) = 0$ bestaat uit de factoren $(x - 3)$ en $(x - 8)$ en de uitkomst van een vermenigvuldiging kan alleen maar nul opleveren als één van de factoren nul is.

Daarom schrijven we: $(x - 3) = 0 \vee (x - 8) = 0$. Als $(x - 3) = 0$ dan moet $x = 3$. Als $(x - 8) = 0$ dan moet $x = 8$. Merk op dat het onzinnig is om te zeggen: $x = 3 \wedge x = 8$, want een getal ("x") kan **nooit** gelijk aan 3 en tegelijkertijd gelijk aan 8 zijn!

Voorbeeld 17.3

Bepaal de snijpunten van de grafiek van f met het functievoorschrift: $f(x) = x^2 - 4x - 12$ met de X en de Y -as. Je gaat als volgt te werk:

De grafiek van f heeft de vergelijking: $y = x^2 - 4x - 12$ in een XY -assenstelsel.

- a. Voor de snijpunten met de X -as geldt: $y = 0$ (zie ook voorbeeld 16.9)

$$y = 0 \Rightarrow x^2 - 4x - 12 = 0 \Leftrightarrow (x + 2)(x - 6) = 0 \Leftrightarrow x + 2 = 0 \vee x - 6 = 0 \\ \Leftrightarrow x = -2 \vee x = 6$$

Zodat de coördinaten van de snijpunten met de X -as: (-2, 0) en (6, 0) zijn.

- b. Voor het snijpunt met de Y -as geldt: $x = 0$

$$x = 0 \Rightarrow y = 0^2 - 4 \times 0 - 12 = -12. \text{ De coördinaten van het snijpunt met de } Y\text{-as zijn:} \\ (0, -12)$$

Voorbeeld 17.4 Bestudeer de volgende ontbindingen en oplossingen:

- $x^2 + 6x = 0 \Leftrightarrow x(x + 6) = 0 \Leftrightarrow x = 0 \vee x + 6 = 0 \Leftrightarrow x = 0 \vee x = -6$
- $-x^2 + 25 = 0 \Leftrightarrow -(x^2 - 25) = 0 \Leftrightarrow -(x + 5)(x - 5) = 0 \\ \Leftrightarrow x + 5 = 0 \vee x - 5 = 0 \Leftrightarrow x = -5 \vee x = 5$

Opdracht 17.8 Bereken van alle parabolen in opdracht 17.2 de snijpunten van de grafieken met de X -as via het ontbinden in factoren, als deze bestaan.

Opdracht 17.9 Bereken van alle parabolen in opdracht 17.3 de snijpunten van de grafieken met de X -as via het ontbinden in factoren, als deze bestaan.

Opdracht 17.10 Los de volgende vierkantsvergelijkingen via het ontbinden in factoren op:

- $x^2 - 5x + 4 = 0$
- $x^2 + 3x + 2 = 0$
- $-x^2 - 5x - 6 = 0$
- $-x^2 - 6x + 16 = 0$

Nog een slotopmerking over het ontbinden in factoren.



Als je kunt ontbinden in factoren, dan moet je dit zeker doen, omdat deze methode het snelste werkt en de minste kans op rekenfouten oplevert.

Oplossen vierkantsvergelijking via de abc-formule

Het is niet altijd mogelijk om een gemakkelijke ontbinding in factoren te maken. Daarom kijken we nu naar een formule, welke ons in dit soort gevallen in staat stelt om op relatief eenvoudige wijze de oplossingen van een vierkantsvergelijking te bepalen.

Regel 17.3 De oplossingen van de vergelijking: $ax^2 + bx + c = 0$ ($a \neq 0$) zijn:

$$x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} \text{ (mits ze bestaan)}$$

Toelichting:

1. $x_{1,2}$ is een verkorte schrijfwijze voor: x_1, x_2 . Hiermee bedoelen we de eerste x -waarde (x_1) en de tweede x -waarde (x_2).
2. Met het symbool $\pm$ geven we aan dat we een oplossing kunnen vinden door het “+” teken in de formule in te vullen, en de andere oplossing vinden we door het “-” teken in te vullen.
3. De letter a is de coëfficiënt, welke vóór de onbekende in het kwadraat staat. De letter b is de coëfficiënt, welke vóór de onbekende tot de macht 1 staat. De letter c is de term, waarbij géén onbekende staat.
4. We geven een afleiding hoe je kunt aantonen dat de abc -formule waar is. Deze afleiding (of bewijs) hoef je niet van buiten te kennen. Het geeft alleen maar aan hoe men in de wiskunde aan formules komt. Achter elke regel staat commentaar waarom we deze handeling uitvoeren. Probeer deze gedachtegang te volgen.

Bewijs:

$$ax^2 + bx + c = 0 \Leftrightarrow$$

$$4a^2x^2 + 4abx + 4ac = 0 \Leftrightarrow$$

$$4a^2x^2 + 4abx + b^2 - b^2 + 4ac = 0 \Leftrightarrow$$

$$(2ax + b)^2 = b^2 - 4ac \Leftrightarrow$$

$$2ax + b = \pm \sqrt{b^2 - 4ac} \Leftrightarrow$$

$$2ax = -b \pm \sqrt{b^2 - 4ac} \Leftrightarrow$$

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} \quad (\text{q.e.d.})$$

Commentaar:

We gaan x isoleren. Het probleem is hier dat de eerste twee termen een x bevatten. We gaan van de eerste term een mooi kwadraat maken, waarbij we ervoor zorgen dat we in een later stadium zo weinig mogelijk breuken krijgen. Om deze reden vermenigvuldigen we links en rechts van de “=” met de factor: $4a$

De eerste term is nu: $4a^2x^2 = (2ax)^2$. De tweede term kunnen we beschouwen als het dubbele product van: $4abx = 2 \times 2ax \times b$, maar we missen in de vorm b^2 . Dus plaatsen we $b^2 - b^2 = 0$ links van de “=”

De eerste drie termen vormen een bijzonder product, namelijk $(2ax + b)^2$. De laatste twee termen brengen we naar de andere kant van de “=” Nu kunnen we gemakkelijk x isoleren, we halen als eerste het kwadraat weg.

Breng de term $+ b$ naar de andere kant van de “=”

Tot slot delen we de factor $2a$ weg

q.e.d. is een afkorting van: “quod erat demonstrandum” (Latijns). Dit betekent: “hetgeen bewezen moest worden”

Voorbeeld 17.5

1. Los met behulp van de *abc*-formule op: $x^2 - 3x + 2 = 0$

$$\left. \begin{array}{l} a = 1 \\ b = -3 \\ c = 2 \end{array} \right\} \Rightarrow x_{1,2} = \frac{3 \pm \sqrt{(-3)^2 - 4 \times 1 \times 2}}{2 \times 1} = \frac{3 \pm \sqrt{9 - 8}}{2} = \frac{3 \pm \sqrt{1}}{2} = \frac{3 \pm 1}{2}$$

Je vindt de gezochte x -waarden als volgt:

$$x = \frac{3 + 1}{2} = \frac{4}{2} = 2 \vee x = \frac{3 - 1}{2} = \frac{2}{2} = 1$$

2. Los met behulp van de *abc*-formule op: $-p^2 + 2p + 8 = 0$

$$\left. \begin{array}{l} a = -1 \\ b = 2 \\ c = 8 \end{array} \right\} \Rightarrow p_{1,2} = \frac{-2 \pm \sqrt{2^2 - 4 \times -1 \times 8}}{2 \times -1} = \frac{-2 \pm \sqrt{4 + 32}}{-2} = \frac{-2 \pm \sqrt{36}}{-2} = \frac{-2 \pm 6}{-2}$$

Je vindt de gezochte p -waarden als volgt:

$$p = \frac{-2 + 6}{-2} = \frac{4}{-2} = -2 \vee p = \frac{-2 - 6}{-2} = \frac{-8}{-2} = 4$$

3. Los met behulp van de *abc*-formule op: $2h^2 - 6 = 0$

$$\left. \begin{array}{l} a = 2 \\ b = 0 \\ c = -6 \end{array} \right\} \Rightarrow h_{1,2} = \frac{0 \pm \sqrt{0^2 - 4 \times 2 \times -6}}{2 \times 2} = \frac{\pm \sqrt{48}}{4} = \frac{\pm \sqrt{16 \times 3}}{4} = \frac{\pm 4\sqrt{3}}{4}$$

Je vindt de gezochte h -waarden als volgt:

$$h = \frac{+4\sqrt{3}}{4} = \sqrt{3} \vee h = \frac{-4\sqrt{3}}{4} = -\sqrt{3}$$

Opdracht 17.11 Bereken van alle parabolen in opdracht 17.2 de snijpunten van de grafieken met de X -as met behulp van de *abc*-formule, als deze bestaan.

Opdracht 17.12 Bereken van alle parabolen in opdracht 17.3 de snijpunten van de grafieken met de X -as met behulp van de *abc*-formule, als deze bestaan.

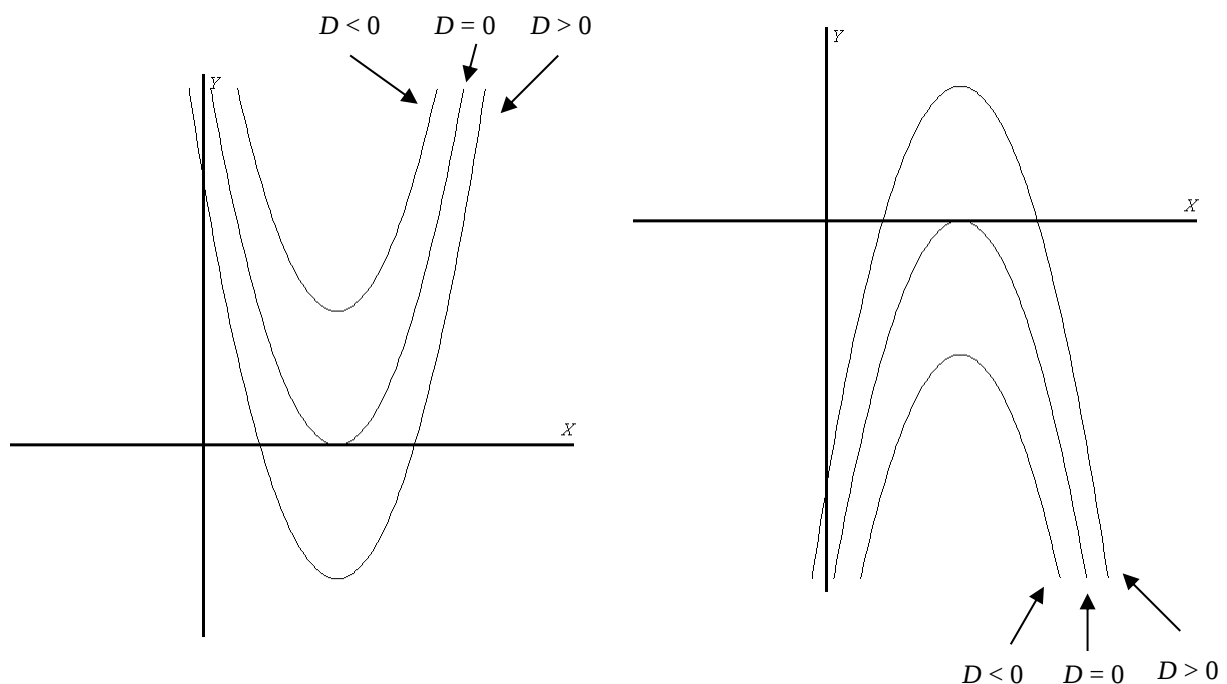
Bij het berekenen van opdracht 16.3c heb je gezien, dat het oplossen met behulp van de *abc*-formule geen oplossingen oplevert, want na het invullen van de getallen krijg je:

$x_{1,2} = \frac{-1 \pm \sqrt{-3}}{2}$ en de wortel uit een negatief getal kun je niet berekenen. Overigens is het logisch dat je geen snijpunten kunt berekenen met de X -as, omdat deze ook niet bestaan! (Zie ook de grafiek van opdracht 17.3c)

We noemen de vorm $b^2 - 4ac$ die in de abc -formule onder het wortelteken staat de discriminantwaarde, of kortweg: de *discriminant* (notatie: D). Deze discriminant D bepaalt het aantal oplossingen van de vierkantsvergelijking en dus ook het aantal snijpunten van de grafiek met de X -as.

Regel 17.4 Bij de vergelijking: $ax^2 + bx + c = 0$ ($a \neq 0$) bepaalt de discriminant $D = b^2 - 4ac$ het aantal oplossingen van de vergelijking:
 $D < 0 \Rightarrow$ de vergelijking heeft 0 oplossingen (géén snijpunten met X -as)
 $D = 0 \Rightarrow$ de vergelijking heeft 1 oplossing (één snijpunt met X -as)
 $D > 0 \Rightarrow$ de vergelijking heeft 2 oplossingen (twee snijpunten met X -as)

We geven dit hieronder grafisch weer voor een dal- en een bergparabool:



Opdracht 17.13 Bereken van de volgende functies het snijpunt met de X en de Y -as mits deze bestaan (maak gebruik van de rekenmachine). Geef alle antwoorden in 2 decimalen nauwkeurig:

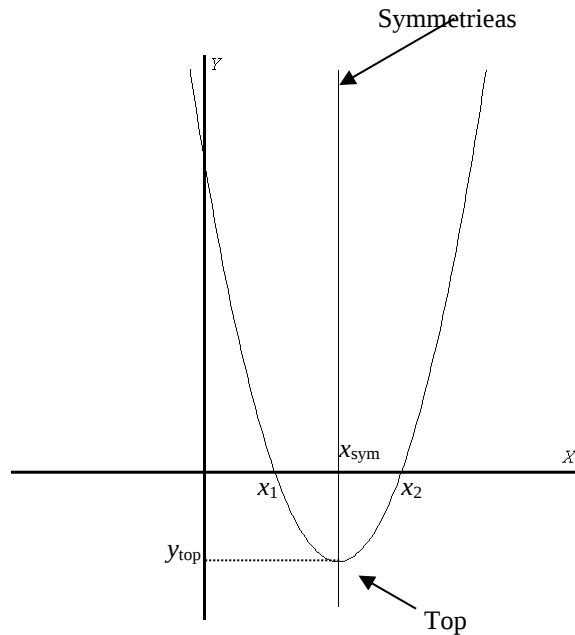
- $f(x) = 2,1x^2 - 1,7x + 5,1$
- $g(x) = -1,8x^2 + 5,2x + 3,7$
- $h(x) = 0,6x^2 - 3,6x + 5,4$

Opdracht 17.14 De vergelijking $x^2 + bx + 36 = 0$ heeft precies één oplossing. Bereken b .

Bepaling van de top van een parabool

Waarschijnlijk heb je bij het tekenen van parabolen al gezien dat de grafiek een symmetrie bevat. Door de top van de parabool gaat een spiegelas die evenwijdig aan de Y-as loopt. Met behulp van deze spiegelas, welke normaal *de symmetrieas* noemen, kun je gemakkelijk de top van de parabool bepalen.

Als je de waarde van de symmetrieas kent, je noemt deze waarde: x_{sym} , dan kun je de topwaarde bepalen, door dit getal in de vergelijking van de parabool in te vullen. Hiermee bepaal je de y-coördinaat van de top. Je noemt dit: y_{top} .



Je kunt de top van een parabool met de volgende regels bepalen:

Regel 17.5 Bij de vergelijking: $y = ax^2 + bx + c$ ($a \neq 0$) is de top van de parabool:

$$\left. \begin{aligned} x_{\text{sym}} &= \frac{x_1 + x_2}{2} = \frac{-b}{2a} \\ y_{\text{top}} &= a \cdot x_{\text{sym}}^2 + b \cdot x_{\text{sym}} + c \end{aligned} \right\} \text{Top } (x_{\text{sym}}, y_{\text{top}})$$

Toelichting:

1. De symmetrieas ligt precies in het midden tussen de twee snijpunten met de X-as x_1 en x_2 . Je bepaalt dit midden door het gemiddelde van de twee snijpunten te bepalen met behulp van de formule: $x_{\text{sym}} = \frac{x_1 + x_2}{2}$.
2. Als de snijpunten niet bestaan of als je de snijpunten nog niet kent, dan maak je gebruik van de formule: $x_{\text{sym}} = \frac{-b}{2a}$. Deze formule is makkelijk te onthouden omdat het een stuk uit de *abc*-formule is.

Voorbeeld 17.6

1. De parabool met de vergelijking: $y = x^2 - 2x - 8$ heeft als snijpunten met de X-as: $y = 0 \Rightarrow x^2 - 2x - 8 = 0 \Leftrightarrow (x - 4)(x + 2) = 0 \Leftrightarrow x = 4 \vee x = -2$. Met behulp van

deze punten kun je de symmetrieas berekenen: $x_{\text{sym}} = \frac{x_1 + x_2}{2} = \frac{4 + (-2)}{2} = \frac{2}{2} = 1$. Je vult deze

waarde in de vergelijking van de parabool in en je krijgt:

$$y_{\text{top}} = 1^2 - 2 \cdot 1 - 8 = 1 - 2 - 8 = -9.$$

Nu weet je de coördinaten van de top deze zijn: $(1, -9)$.

2. De parabool met de vergelijking: $y = x^2 + 2x + 3$ heeft geen snijpunten met de X-as (de discriminantwaarde $D = 2^2 - 4 \cdot 1 \cdot 3 = 4 - 12 = -8 < 0$). Je berekent de symmetrieas

als volgt: $x_{\text{sym}} = \frac{-b}{2a} = \frac{-2}{2 \cdot 1} = \frac{-2}{2} = -1$. Je vult deze waarde in de vergelijking van de

parabool in en je krijgt: $y_{\text{top}} = (-1)^2 + 2 \cdot (-1) + 3 = 1 - 2 + 3 = 2$.

Nu weet je de coördinaten van de top deze zijn: $(-1, 2)$.

Opdracht 17.15 Bereken van alle parabolen in opdracht 17.2 de top van de parabolen met de hierboven genoemde formules.

Opdracht 16.16 Bereken van alle parabolen in opdrachten 16.3 de top van de parabolen met de hierboven genoemde formules.

Opdracht 17.17 Bereken in opdracht 16.13 de top van de parabolen.

Om de grafiek van een parabool goed te kunnen tekenen dient je het volgende uit te voeren:

-  Bereken de snijpunten met de X en de Y-as
-  Bereken de top
-  Spiegel het snijpunt met de Y-as in de symmetrieas
-  Neem eventueel nog enkele x-waarden, zodat je minimaal 5 punten van de grafiek hebt.

Opdracht 17.18 Iemand gooit vanaf een hoogte van 60 m een steen met een beginsnelheid van 20 m/s omhoog. We nemen voor het gemak aan dat $g = -10 \text{ m/s}^2$. Het voorschrift om de hoogte op elk tijdstip te berekenen is: $h(t) = 60 + 20t - 5t^2$ ($t \geq 0$).

- a. Bepaal de waarden a , b en c uit de abc -formule
- b. Bereken het tijdstip, waarop het hoogste punt wordt bereikt. (dit is: t_{sym})
- c. Bereken de maximale hoogte. (dit is: h_{top})
- d. Bereken het tijdstip dat het voorwerp op de grond valt. (dit is als $h(t) = 0$)
- e. Bereken het tijdstip dat het voorwerp weer op een hoogte van 60 m aankomt
- f. Teken de grafiek van h als functie van de t .

Opdracht 17.19 Voor een eenparig versnelde beweging geldt de volgende formule om de afgelegde weg s_t te berekenen: $s_t = s_0 + v_0 \cdot t + \frac{1}{2}a \cdot t^2$. Voor een bepaalde beweging geldt: $s_0 = -20 \text{ m}$, $v_0 = 14 \text{ m/s}$ en $a = -4 \text{ m/s}^2$ ($t \geq 0$).

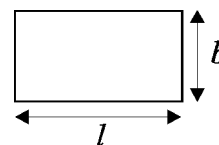
- a. Bereken de tijdstippen t waarop $s_t = 0 \text{ m}$
- b. Bereken de tijdstippen t waarop $s_t = -20 \text{ m}$
- c. Bereken het tijdstip t waarop s_t maximaal is en bepaal tevens hoe groot s_t op dat moment is.
- d. Teken de grafiek, waarbij s als functie van t wordt uitgezet. Kies als tijdsinterval voor de grafiek de waarden die je in opdracht b gevonden hebt.

Opdracht 17.20 Met een koord van 100 cm maken we een rechthoek.

- a. De omtrek O kan berekend worden met de formule: $O = 2(l + b)$.

Vul voor O de gegeven 100 (cm) in en isoleer l in deze formule.

- b. Het oppervlak A van een rechthoek kun je berekenen met behulp van de formule: $A = l \cdot b$. Maak een nieuwe formule voor A door hetgeen je in opdracht a voor l hebt gevonden in te vullen ("substitueren") in de formule. Je hebt nu een formule, waarin alleen nog maar de letters A en b in voorkomen, oftewel je hebt een functievoorschrift gemaakt van de vorm $A(b) =$
- c. Bereken voor welke b het oppervlak A maximaal (zo groot mogelijk) wordt. Bereken ook hoe groot dit oppervlak A is. Welk soort rechthoek heb je gekregen?



Bepaling van het snijpunt tussen een rechte lijn en een parabool

Voorbeeld 17.7

Gegeven zijn de volgende functies:

$$f(x) = x^2 - 2x - 3 \text{ en } g(x) = x + 1.$$

Bereken de snijpunten tussen de grafieken van deze functies. We gaan als volgt te werk: Je schrijft de vergelijkingen van de grafieken op. Dit zijn:

$$\begin{cases} y = x^2 - 2x - 3 \\ y = x + 1 \end{cases}$$

en met behulp van substitutie vind je:

$$x^2 - 2x - 3 = x + 1 \Leftrightarrow x^2 - 3x - 4 = 0$$

$$\Leftrightarrow$$

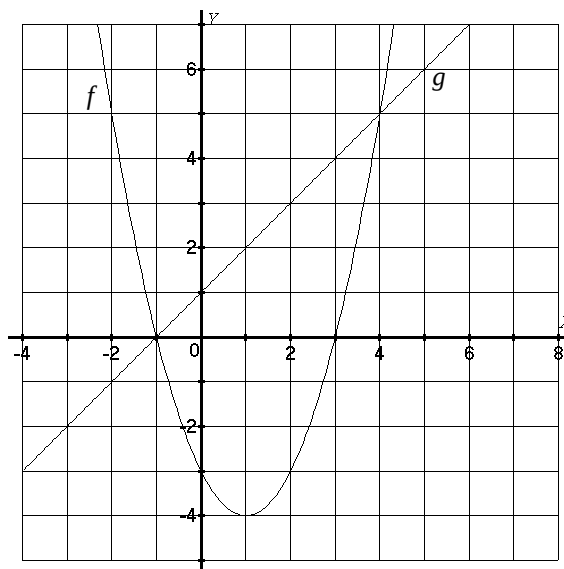
$$(x - 4)(x + 1) = 0 \Leftrightarrow x = 4 \vee x = -1$$

Hiermee heb je de x -coördinaten van de snijpunten bepaald. Met behulp van de vergelijking van de lijn vind je de

y -coördinaten van de snijpunten als volgt:

$$x = 4 \Rightarrow y = 4 + 1 = 5, \text{ dus snijpunt is } (4, 5)$$

$$x = -1 \Rightarrow y = -1 + 1 = 0, \text{ dus snijpunt is } (-1, 0)$$



Opdracht 17.21 Gegeven zijn de volgende functies:

$$f(x) = 2x^2 - 3x - 5 \text{ en } g(x) = 2x - 7.$$

- a. Bereken de snijpunten tussen de grafieken van deze functies.
b. Teken de grafieken van de functies f en g in één XY -assenstelsel.

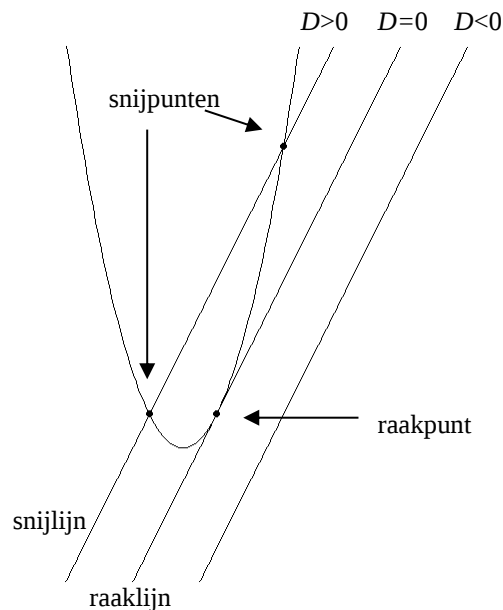
Opdracht 17.22 Gegeven zijn de volgende functies:

$$f(x) = x^2 + 4x + 5 \text{ en } g(x) = 2x + 4.$$

- a. Bereken de snijpunten van de grafiek van f met de X en de Y -as
b. Bereken de snijpunten van de grafiek van g met de X en de Y -as
c. Bereken de top van de grafiek van f en geef aan of dit een maximum of een minimum is
d. Teken de grafieken van de functies f en g in één XY -assenstelsel
e. Bereken de snijpunt(en) tussen de grafieken van deze functies

Als je in het algemeen de grafiek van een parabool en een rechte lijn tekent, dan kun je drie verschillende situaties tegenkomen.

1. De lijn en de parabool hebben twee gemeenschappelijke punten. We noemen deze punten *snijpunten* en de lijn heet een *snijlijn*.
2. De lijn en de parabool hebben precies één gemeenschappelijk punt. We noemen dit punt een *raakpunt* en de lijn heet een *raaklijn*.
3. De lijn en de parabool hebben geen enkel gemeenschappelijk punt.



Bij het berekenen van eventuele snijpunten tussen de lijn met de vergelijking: $y = mx + n$ en de parabool met de vergelijking: $y = px^2 + qx + r$ vind je met behulp van de substitutie methode:

$$px^2 + qx + r = mx + n \Leftrightarrow px^2 + qx - mx + r - n = 0$$

$$\Leftrightarrow \underbrace{p}_a x^2 + \underbrace{(q - m)}_b x + \underbrace{(r - n)}_c = 0$$

We hebben x buiten haakjes gehaald om duidelijk aan te geven wat de getallen a , b en c uit de abc -formule zijn. Afhankelijk van de discriminant D vind je:

1. $D > 0 \Rightarrow$ je hebt situatie 1. Je vindt twee antwoorden en deze komen overeen met de twee snijpunten van de snijlijn.
2. $D = 0 \Rightarrow$ je hebt situatie 2. Je vindt één antwoord en dit komt overeen met het raakpunt van de raaklijn.
3. $D < 0 \Rightarrow$ je hebt situatie 3. Je vindt geen antwoord en dit komt overeen met het feit dat de parabool en de rechte lijn geen enkel punt gemeenschappelijk hebben.

Opdracht 17.23 Bepaal de snijpunten tussen de grafiek van de functie f met het voorschrift:

$$f(x) = x^2 + 2x - 3 \text{ en:}$$

- a. de grafiek van g met het voorschrift: $g(x) = x + 3$
- b. de grafiek van h met het voorschrift: $h(x) = 4x - 4$
- c. de grafiek van k met het voorschrift: $k(x) = 2x - 5$
- d. teken de grafieken van de functies f , g , h en k in één assenstelsel.

Voorbeeld 17.8

Gegeven is de functie met het voorschrift $f(x) = x^2 + 3x - 4$. Bepaal p zodanig dat de grafiek van de vergelijking $g(x) = px - 5$ raakt aan de grafiek van f .

Je gaat als volgt te werk. De vergelijking van de grafiek van f is: $y = x^2 + 3x - 4$ en de vergelijking van g is: $y = px - 5$. Door middel van substitutie vind je:

$$x^2 + 3x - 4 = px - 5 \Leftrightarrow x^2 + 3x - px - 4 + 5 = 0 \Leftrightarrow x^2 + (3 - p)x + 1 = 0$$

Omdat de grafiek van g raakt aan de grafiek van f , mag er maar één gemeenschappelijk punt zijn. Dit houdt in dat de discriminant D van de vierkantsvergelijking gelijk aan 0 moet zijn. In de laatste vierkantsvergelijking geldt:

$$\left. \begin{array}{l} a = 1 \\ b = 3 - p \\ c = 1 \end{array} \right\} \Rightarrow D = b^2 - 4ac = (3 - p)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 1 = 9 - 6p + p^2 - 4 = p^2 - 6p + 5 = 0$$

Via ontbinden in factoren vind je:

$$p^2 - 6p + 5 = 0 \Leftrightarrow (p - 1)(p - 5) = 0 \\ \Leftrightarrow p = 1 \vee p = 5.$$

Voor twee waarden van p vind je een raaklijn.

We bekijken beide situaties afzonderlijk:

1. $p = 1 \Rightarrow g(x) = x - 5$. De berekening van het snijpunt levert:

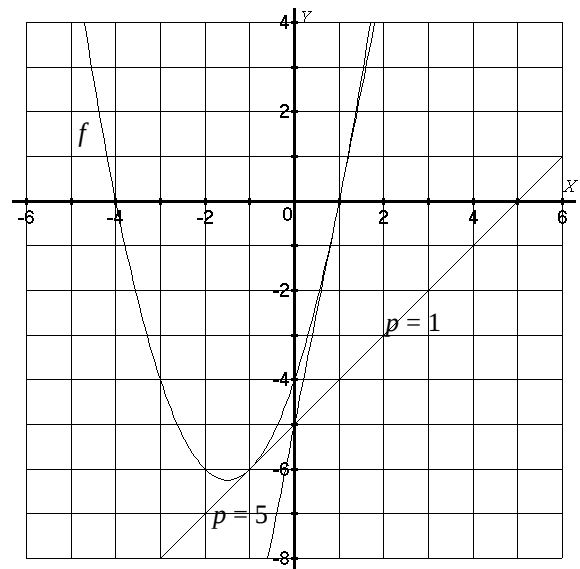
$$x^2 + 3x - 4 = x - 5 \Leftrightarrow x^2 + 2x + 1 = 0 \\ \Leftrightarrow (x + 1)^2 = 0 \Leftrightarrow x = -1$$

De y-coördinaat van het raakpunt wordt:
 $y = -1 - 5 = -6$.

2. $p = 5 \Rightarrow g(x) = 5x - 5$. De berekening van het snijpunt levert:

$$x^2 + 3x - 4 = 5x - 5 \Leftrightarrow \\ x^2 - 2x + 1 = 0 \Leftrightarrow \\ (x - 1)^2 = 0 \Leftrightarrow x = 1$$

De y-coördinaat van het raakpunt wordt: $y = 5 \cdot 1 - 5 = 5 - 5 = 0$.



Opdracht 17.24 Gegeven is de functie met het voorschrift $f(x) = -x^2 - 2x + 3$. Bepaal p zodanig dat de grafiek van de vergelijking $g(x) = px + 4$ raakt aan de grafiek van f .

Opdracht 17.25 Gegeven is de functie met het voorschrift $f(x) = x^2 - 5x + 6$. Bepaal q zodanig dat de grafiek van de vergelijking $g(x) = 2x + q$ raakt aan de grafiek van f .

Opdracht 17.26 Los de volgende vergelijking op: $ax^2 + ax + 2b = b(1 - x)$

