

12 Differentiëren

12.1 Raaklijnen aan een grafiek

De “richtingscoëfficiënt” van een gebogen lijn bestaat niet. Voor de helling van de grafiek in een punt gebruik je de richtingscoëfficiënt van de raaklijn aan de grafiek in dat punt. Als je op het raakpunt inzoomt, zie je dat de raaklijn en de grafiek steeds meer “op elkaar gaan lijken”. Er gebeurt hetzelfde als op aarde: de aarde is rond, maar lopend op straat kun je dat niet zien. Pas als je ver uitzicht hebt, merk je er iets van: bijvoorbeeld een schip dat op zee “onder de horizon zakt”.

Voorbeelden

- 1 In de figuur hiernaast zijn in de punten $A(-2,10)$, $B(0,0)$ en $C(3,0)$ de raaklijnen getekend aan de grafiek van $y = x^3 - 9x$.

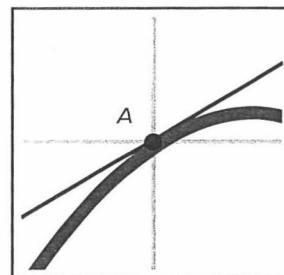
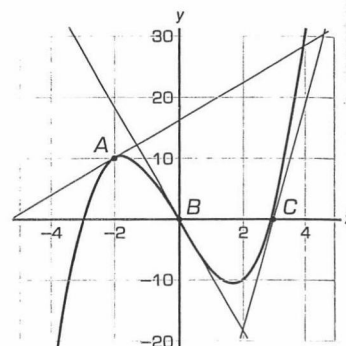
In het kader is ingezoomd op A . Je ziet, dat vlakbij A de grafiek van y en de raaklijn niet van elkaar te onderscheiden zijn.

De helling van de grafiek in de punten A , B en C is achtereenvolgens 3, -9 en 18.

De rico's zijn berekend met de GR met

$\boxed{2nd} \boxed{CALC} \boxed{dy/dx}$ gevolgd door de x -waarde.

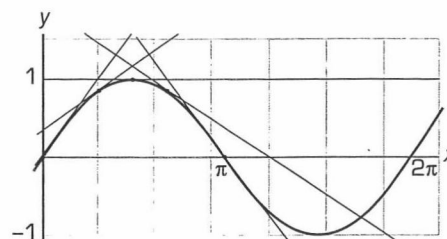
Met het invullen van de coördinaten van A , B en C vind je de vergelijkingen van de raaklijnen:
in A : $y = 3x + 16$; in B : $y = -9x$; in C : $y = 18x - 54$.



- 2 In de figuur hiernaast zijn de raaklijnen getekend aan de grafiek van $y = \sin(x)$ in de punten $(0,0)$,

$(\frac{1}{3}\pi, \frac{1}{2}\sqrt{3})$, $(\frac{1}{2}\pi, 1)$, $(\frac{2}{3}\pi, \frac{1}{2}\sqrt{3})$ en $(\pi, 0)$.

De richtingscoëfficiënten van deze raaklijnen zijn (berekend met de GR):

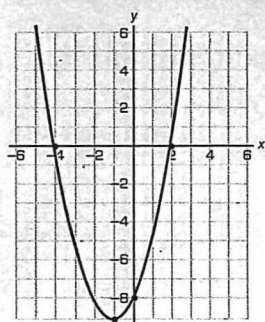


x :	0	$\frac{1}{3}\pi$	$\frac{1}{2}\pi$	$\frac{2}{3}\pi$	π
rico:	1	$\frac{1}{2}$	0	$-\frac{1}{2}$	-1

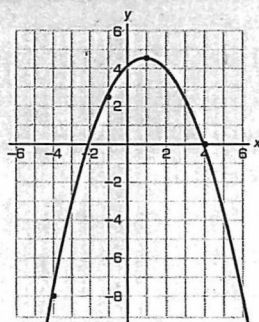
Opgaven

- 1** Hieronder zijn de grafieken van een aantal functies getekend. In iedere grafiek zijn 4 punten gemarkeerd. Neem de grafieken nauwkeurig over, teken in ieder gemarkeerd punt de raaklijn aan de grafiek en stel de vergelijking van die raaklijn op.

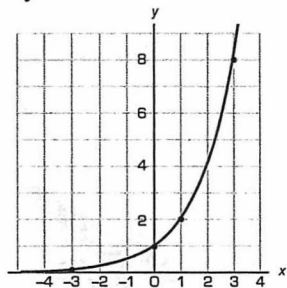
a $y = x^2 + 2x - 8$



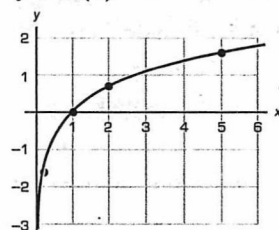
b $y = -\frac{1}{2}x^2 + x + 4$



c $y = 2^x$

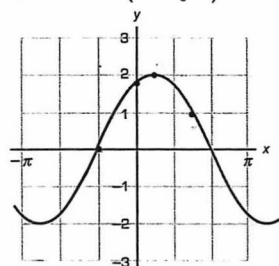


d $y = \ln(x)$

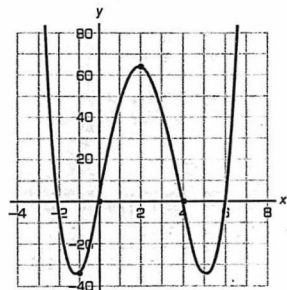


(x-coördinaat 1^e punt is $\frac{1}{5}$)

e $y = 2 \cos\left(x - \frac{1}{6}\pi\right)$



f $y = x^4 - 8x^3 + 4x^2 + 48x$

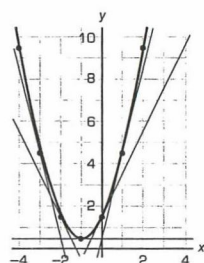


12 Differentiëren

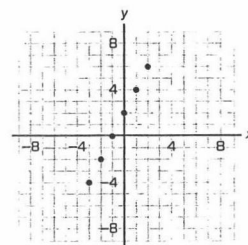
12.2 Grafieken van rico's: $f'(x)$

Je kunt voor een functie de rico's van de raaklijnen in verschillende punten achter elkaar zetten. Je krijgt dan opnieuw een functie. Deze functie wordt de **afgeleide functie** genoemd. De notatie is $f'(x)$ of $\frac{df}{dx}$.

Hieronder is de grafiek van $y = x^2 + 2x + 1,5$ getekend, met daarnaast een plot met de rico's van de raaklijnen aan de grafiek van y in de getekende punten.



x	$f(x)$	$f'(x)$
-4	9,5	-6
-3	4,5	-4
-2	1,5	-2
-1	0,5	0
0	1,5	2
1	4,5	4
2	9,5	6



In het midden staat een tabel met de betreffende functiewaarden en bijbehorende rico's. De rico's zijn berekend met de GR.

Voorbeeld

Als je in punt A op de grafiek van $y = x^2$ de rico wilt berekenen, kun je dat als volgt doen (zie beide afbeeldingen):

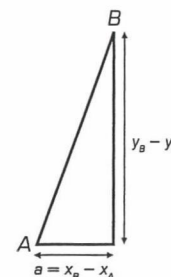
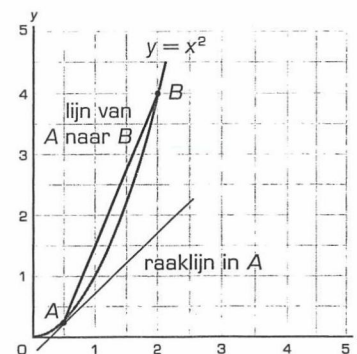
Kies een tweede punt B op de grafiek. Hoe dicht B bij A ligt, hoe meer de lijn van A naar B op de raaklijn lijkt.

In formules:

$$\begin{aligned} rc_{AB} &= \frac{y_B - y_A}{x_B - x_A} = \frac{f(x_A + a) - f(x_A)}{a} \\ &= \frac{(x_A + a)^2 - x_A^2}{a} = \frac{x_A^2 + 2ax_A + a^2 - x_A^2}{a} = 2x_A + a \end{aligned}$$

Als B heel dicht bij A ligt, is a heel klein; zo klein, dat je met invullen van $a = 0$ de rico berekend hebt.

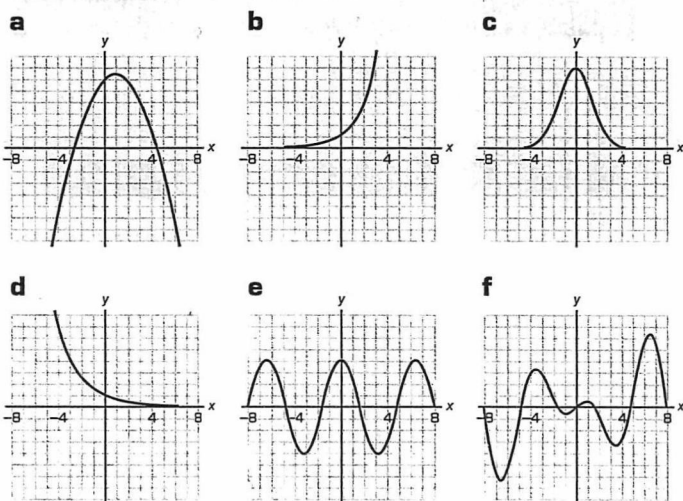
Omdat A willekeurig gekozen is, heb je zo de afgeleide van de functie $f(x) = x^2$ berekend: $f'(x) = 2x$.



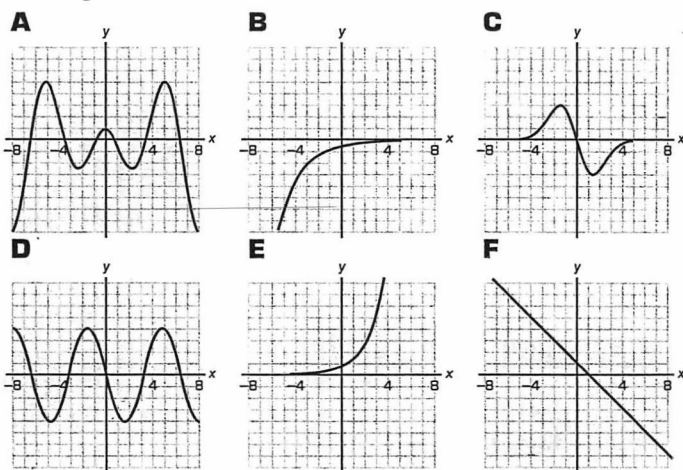
Opgaven

- 2** Hieronder zijn de grafieken van zes functies getekend en de grafieken van hun afgeleiden. Geef aan welke grafieken bij elkaar horen.

De functies:



De afgeleiden:



- 3** Bereken op dezelfde manier als in het voorbeeld op de bladzijde hiernaast de afgeleide van de functie $f(x) = x^3$.
- 4** Het berekenen van een afgeleide is niet altijd zo gemakkelijk. Probeer het maar eens voor de functies $y = \sin(x)$ en $y = e^x$. Je houdt dan, als het goed is, breuken over, waarin je niet zomaar $a = 0$ kunt invullen.

Op de website www.basisvaardighedenwiskunde.noordhoff.nl kun je verder oefenen.

12 Differentiëren

12.3 Afgeleiden van standaardfuncties

In ieder punt opnieuw de richtingscoëfficiënt van de raaklijn berekenen is wel erg veel werk om de grafiek van de afgeleide te tekenen.

Differentiëren is het bepalen van het functievoorschrift van de afgeleide.

Voor een aantal standaardfuncties zijn dit de functievoorschriften van de afgeleide functies:

$f(x)$		$f'(x)$
$y = c$, met c een constante	$\times$	$y' = 0$
$y = x^p$, met p in $\mathbb{R}$	$\times$	$y' = p \cdot x^{p-1}$
$y = \sin(x)$	$\times$	$y' = \cos(x)$
$y = \cos(x)$	$\times$	$y' = -\sin(x)$
$y = g^x$, met $g > 0, g \neq 1$		$y' = g^x \cdot \ln(g)$
$y = {}^g\log(x)$, met $g > 0, g \neq 1$		$y' = \frac{1}{x \cdot \ln(g)}$

$$y = e^x$$

$$y' = e^x$$

$$y = \ln x$$

$$y' = \frac{1}{x}$$

Rekenregels

- Als $f(x) = g(x) + C$, dan is $f'(x) = g'(x)$.
- Als $f(x) = c \cdot g(x)$, dan is $f'(x) = c \cdot g'(x)$.

Voorbeelden

- De afgeleide van $y = 5$ is $y' = 0$.
- De afgeleide van $y = x^2$ is $y' = 2x$.
- De afgeleide van $y = \sin(x) - 2$ is $y' = \cos(x)$.
- De afgeleide van $y = -3\cos(x)$ is $y' = 3\sin(x)$.
- De afgeleide van $y = \sqrt{x} = x^{\frac{1}{2}}$ is $y' = \frac{1}{2}x^{-\frac{1}{2}} = \frac{1}{2\sqrt{x}}$.
- De afgeleide van $y = \frac{2}{x^4} = 2 \cdot x^{-4}$ is $y' = 2 \cdot (-4)x^{-5} = \frac{-8}{x^5}$.
- De afgeleide van $y = e^x$ is $y' = e^x \cdot \ln(e) = e^x \cdot 1 = e^x$.
- De afgeleide van $y = \ln(x) = {}^e\log(x)$ is $y' = \frac{1}{x \cdot \ln(e)} = \frac{1}{x \cdot 1} = \frac{1}{x}$.

Opgaven

5 Bereken de afgeleide van de volgende functies.

a $y=1$

e $y=3x^2$

i $y=2^x$

b $y=x$

f $y=x^{-4}$

j $y={}^3\log(x)$

c $y=x^4$

g $y=3x^{-2}$

k $y=5e^x$

d $y=0$

h $y=\frac{1}{x^2}$

l $y=-3\ln(x)$

6 Bereken $\frac{dy}{dx}$ voor de volgende functies.

a $y=-1$

e $y=2\sqrt{x}$

i $y=x\sqrt{x} = x^1 \cdot x^{\frac{1}{2}} = x^{\frac{3}{2}}$

b $y=x-1$

f $y=-2x^3+5$

j $y=\frac{1}{\sqrt{x}}$

c $y=\frac{1}{2}x$

g $y=2\sin(x)$

k $y=\frac{1}{3x^3}$

d $y=2x^2+4$

h $y=2-\cos(x)$

l $y=\frac{5}{x\sqrt{x}}$

7 Differentieer de volgende functies.

a $y=3\sin(x)$

e $y=-2^x$

i $y=3-2e^x$

b $y=3+\sin(x)$

f $y=\log(x)$

j $y={}^2\log(x)$

c $y=3-2^x$

g $y=3\ln x$

k $y=5 \cdot (1,07)^x$

d $y=5 \cdot e^x$

h $y=5(1-\log(x))$

l $y=10+2 \cdot 10^x$

8 Differentieer de volgende functies.

a $f(x)=5e$

~~k~~ e $k(x)=x\sqrt{3}+3\sqrt{\pi}$

~~x~~ b $g(x)=6(x+2)$

f $p(h)=100 \cdot \left(\frac{4}{3}\right)^h$

~~x~~ c $h(t)=1-\frac{1}{3}\cos(t)$

g $T(t)=40\left(1-\left(\frac{1}{2}\right)^t\right)$

~~x~~ d $j(a)=\frac{1}{2}(1+2\sin(a))$

h $W(v)=10+2 \cdot {}^3\log(v)$

12 Differentiëren

12.4 Som- en productregel

Rekenregels

3 Als $y = f(x) + g(x)$, dan $y' = f'(x) + g'(x)$. (Somregel)

Als $y = f(x) - g(x)$, dan $y' = f'(x) - g'(x)$.

4 Als $y = f(x) \cdot g(x)$, dan $y' = f'(x) \cdot g(x) + f(x) \cdot g'(x)$. (Productregel)

Differentiëren kun je het beste stap voor stap doen. Een stukje dat nog gedifferentieerd moet worden, kun je dan tussen rechte haken zetten met een accent rechtsboven. In de volgende voorbeelden is die schrijfwijze gebruikt.

Voorbeelden

1 Differentieer $y = x^2 + 3x + 1$.

Antwoord: $y' = [x^2]' + [3x]' + [1]' = 2x + 3 + 0 = 2x + 3$.

2 Differentieer $y = \frac{3}{x} + 2 \cos(x)$. (Bedenk: $\frac{1}{x} = x^{-1}$)

Antwoord: $y' = \left[\frac{3}{x}\right]' + [2 \cos(x)]' = -3x^{-2} - 2 \sin(x) = -\frac{3}{x^2} - 2 \sin(x)$.

3 Differentieer $y = 5t \sin(t)$.

Antwoord:

$y = [5t]' \cdot \sin(t) + 5t \cdot [\sin(t)]' = 5 \cdot \sin(t) + 5t \cdot \cos(t) = 5 \sin(t) + 5t \cos(t)$.

4 Differentieer $y = \frac{\cos(t)}{t}$. (Bedenk: $\frac{\cos(t)}{t} = \cos(t) \cdot t^{-1}$)

Antwoord: $y' = [\cos(t)]' \cdot t^{-1} + \cos(t) \cdot [t^{-1}]' = -\sin(t) \cdot t^{-1} + \cos(t) \cdot -t^{-2}$

$$= -\frac{\sin(t)}{t} - \frac{\cos(t)}{t^2} = -\frac{t \sin(t) + \cos(t)}{t^2}.$$

Let op:

De productregel kun je gemakkelijk fout doen:

Als $y = u \cdot v$, dan geldt **niet**: $y' = u' \cdot v'$.

Neem als voorbeeld $y = x^4 = x^2 \cdot x^2$.

Dan is $y' = 4x^3$ en **niet** $y' = [x^2]' \cdot [x^2]' = 2x \cdot 2x = 4x^2$.

Opgaven

9 Bereken de afgeleide van de volgende functies.

- | | | |
|-------------------------------------|--|---|
| a $y = 3x^4 - 2x$ | e $y = x^3 + 2x - 3x^{-3}$ | i $y = \sin(x) - \cos(x)$ |
| b $y = -x^3 - \frac{3}{x^2}$ | f $y = \frac{1}{2x^2} - \frac{3}{5x^5}$ | j $y = x + 3\cos(x)$ |
| c $y = x^{-2} + x^{-1}$ | g $y = 2\sqrt{x} + x\sqrt{x}$ | k $y = \frac{1}{x} + \left(\frac{1}{2}\right)^x$ |
| d $y = 3 - 2x + 5\sqrt{x}$ | h $y = \sin(x) + \cos(x)$ | l $y = \sqrt{x} - 2 \log(x)$ |

10 Differentieer de volgende functies.

- | | |
|---|--|
| a $f(x) = x\sqrt{3} + 3\sqrt{x}$ | f $n(x) = 5ax^2$ |
| b $g(t) = t - \frac{1}{3}\cos(t)$ | g $p(h) = 3h^2 - 2 \cdot 3^h$ |
| c $h(x) = (x+1)(x+2)$ | h $s(t) = at^2 + \frac{1}{2}gt + v_0$ |
| d $j(x) = 5\sqrt{2}(x - \ln(x))$ | i $T(t) = \left(2t + \frac{1}{t}\right)\sqrt{t}$ |
| e $k(x) = (x^2 - 1)(x^3 + 2x^2 + 1)$ | j $V(s) = (s^2 + s + 1)\left(2s - \frac{1}{s}\right)$ |

11 Bereken de afgeleide van de volgende functies.

- | | | |
|---------------------------------------|----------------------------------|--|
| a $y = x \sin(x)$ | e $y = 2 \sin(x) \cos(x)$ | i $y = x^2 \cdot \log(x)$ |
| b $y = x \cdot e^x$ | f $y = x^2 \cos(x)$ | j $y = 3x^2 \cdot 2^x$ |
| c $y = x \ln(x) - x$ | g $y = x^2 \cdot e^x$ | k $y = (x-1) \cdot {}^3\log(x)$ |
| d $y = \sqrt{x} \cdot \cos(x)$ | h $y = x \cdot \log(x)$ | l $y = (2e^x + 1) \cdot \ln(x)$ |

12 Differentieer de volgende functies.

- | | |
|--|---|
| a $f(x) = x^{5.5} \log(x)$ | e $m(n) = 3\left(\frac{1}{3}\right)^n \cdot (n+1)$ |
| b $g(y) = 2\sqrt{y} \cdot (y + 2\sin(y))$ | f $n(t) = t^{-3} \cdot \sin(t)$ |
| c $h(t) = 6 \sin(t) \cos(t)$ | g $p(a) = a\sqrt{a} \cdot 2^a$ |
| d $k(x) = \frac{1}{10}e^x \left(1 - \frac{2}{x^2}\right)$ | h $V(t) = \left(t + \frac{1}{t}\right) \cdot \ln(t)$ |

Op de website www.basisvaardighedenwiskunde.noordhoff.nl kun je verder oefenen.

12 Differentiëren

12.5 Kettingregel

$y = (x^2 + 1)^{10}$ is een voorbeeld van een **samengestelde functie**.

Samengestelde functies maak je door het resultaat van de ene functie te gebruiken als argument voor een volgende functie.

Je rekt de functie zo uit: $x \rightarrow x^2 + 1 \rightarrow (x^2 + 1)^{10}$.

Voor het differentiëren gebruik je de **kettingregel**.

Rekenregel $v(u)$ $y' = v'(u) \cdot u'$

5 Als $y = f(g(x))$, dan is $y' = f'(g(x)) \cdot g'(x)$.

(Kettingregel)

Voorbeelden

- 1 Bereken de afgeleide van $y = \sin(50x)$.

Met de functies

$g(x) = 50x$ en

$f(t) = \sin(t)$ geldt:

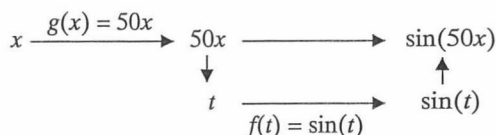
$y = f(g(x))$ (zie figuur).

De afgeleide van $f(t)$ is $f'(t) = \cos(t)$.

De afgeleide van $g(x)$ is $g'(x) = 50$.

Volgens de kettingregel bereken je de afgeleide als volgt:

$$y = f'(g(x)) \cdot g'(x) = \cos(50x) \cdot 50.$$



- 2 Bereken de afgeleide van $y = (x^2 + 1)^{10}$.

Met de functies $g(x) = x^2 + 1$ en $f(t) = t^{10}$ geldt: $y = f(g(x))$.

De afgeleide van $f(t)$ is $f'(t) = 10t^9$.

De afgeleide van $g(x)$ is $g'(x) = 2x$.

Volgens de kettingregel bereken je de afgeleide als volgt:

$$y = f'(g(x)) \cdot g'(x) = 10(x^2 + 1)^9 \cdot 2x = 20x(x^2 + 1)^9.$$

- 3 Bereken de afgeleide van $y = e^{-x}$.

Met de functies $g(x) = -x$ en $f(t) = e^t$ geldt: $y = f(g(x))$.

De afgeleide van $y = e^{-x}$ is:

$$y = f'(g(x)) \cdot g'(x) = e^{-x} \cdot (-1) = -e^{-x}.$$

Opgaven

13 Differentieer de volgende functies.

a $y = \sin(3x)$

e $y = \sin(2\pi x)$

i $y = (1-x)^3$

b $y = 3\cos(2x)$

f $y = \ln(3x)$

j $y = 2^{-x}$

c $y = (2x+1)^8$

g $y = \frac{1}{2}e^{-x}$

k $y = 2e^{-5x}$

d $y = e^{2x}$

h $y = \log(3x)$

l $y = (1-2x)^3$

14 Differentieer de volgende functies.

a $y = x + \sin(2x)$

e $y = \sin(2x) - \cos(3x)$

i $y = \ln(x^2 + 1)$

b $y = x^2 - e^x$

f $y = (1-x)^5 + x^6$

j $y = x^2 + e^{1-x}$

c $y = x + \sqrt{2x}$

g $y = 1 + x + \sqrt{1-x}$

k $y = \sin(2x + \frac{1}{3}\pi)$

d $y = \frac{1}{x} + \log(5x)$

h $y = 5^{1-3x}$

l $y = 5 \cdot 3^{2x}$

15 Differentieer de volgende functies.

a $f(x) = (x^3 + 2)^5$

e $f(x) = (2x^2 + 1)^6$

i $f(x) = \cos\left(\frac{1}{x}\right)$

b $f(t) = (3 - t^2)^3$

f $f(t) = \sqrt{1-t^2}$

j $f(t) = 2^{1-t^2}$

c $f(x) = \frac{1}{(1+2x^2)^3}$

g $f(x) = 5\sin(2\sqrt{x})$

k $f(x) = \log(1-x)$

d $f(t) = \sin(t^2 + 1)$

h $f(t) = 3\ln(1-\sqrt{t})$

l $f(t) = {}^3\log(5t)$

16 Differentieer de volgende functies.

a $y = x \cdot \sin(2x)$

e $y = \sin(2x) \cdot \cos(3x)$

i $y = (1-x)^3 \cdot e^x$

b $y = x^2 \cdot e^x$

f $y = x^2 \cdot {}^5\log(1-x)$

j $y = 2x^3 \sin(\pi x)$

c $y = x \cdot \sqrt{2x}$

g $y = \sqrt{x^2 + x} \cdot \ln(x)$

k $y = \frac{1}{x^2 + 1} \cdot \cos(x)$

d $y = x \ln(x)$

h $y = \frac{1}{x} \cdot \log(5x)$

l $y = \frac{1}{\cos(x)} \cdot (x^2 + 1)$

12 Differentiëren

12.6 De afgeleide van een quotiënt van functies

De productregel en de kettingregel kun je ook gebruiken voor het differentiëren van functies die een breuk van andere functies zijn.

Voorbeeld

1 Bereken de afgeleide van $y = \frac{x}{\sin(x)}$.

Met $y = \frac{x}{\sin(x)} = x \cdot \sin^{-1}(x)$ is de functie een product van functies.

Dan: $y' = [x]' \cdot \sin^{-1}(x) + x \cdot [\sin^{-1}(x)]'$ als

$$= 1 \cdot \sin^{-1}(x) + x \cdot (-\sin^{-2}(x) \cdot \cos(x)) = \frac{1}{\sin(x)} - \frac{x \cos(x)}{\sin^2(x)} = \frac{\sin(x) - x \cos(x)}{\sin^2(x)}$$

De quotiëntregel

In plaats van de hier beschreven werkwijze bestaat er een speciale rekenregel voor het differentiëren van een quotiënt van functies: de **quotiëntregel**.

Rekenregel

$$6 \text{ Als } y = \frac{f(x)}{g(x)}, \text{ dan is } y' = \frac{g(x) \cdot f'(x) - f(x) \cdot g'(x)}{(g(x))^2} \quad (\text{Quotiëntregel})$$

Voorbeeld

2 Bereken de afgeleide van $y = \frac{2x}{x^2+1}$.

De afgeleide van y bereken je met de quotiëntregel als volgt:

$$\begin{aligned} y' &= \frac{(x^2+1) \cdot [2x]' - 2x \cdot [x^2+1]'}{(x^2+1)^2} \text{ als} \\ &= \frac{(x^2+1) \cdot 2 - 2x \cdot 2x}{(x^2+1)^2} = \frac{2x^2+2-4x^2}{(x^2+1)^2} = \frac{-2x^2+2}{(x^2+1)^2} \end{aligned}$$

Opgaven

17 Differentieer de volgende functies.

a $y = \frac{x+1}{x-1}$

e $y = \frac{x^2+1}{x+1}$

i $y = \frac{2+x}{2-x}$

b $y = \frac{\cos(x)}{x}$

f $y = \frac{x}{2x+1}$

j $y = \frac{\sin(x)}{x+1}$

c $y = \frac{\ln(x)}{x}$

g $y = \frac{3e^x}{x-1}$

k $y = \frac{3e^{-x}}{3x+1}$

d $y = \frac{1}{x+1}$

h $y = \frac{\log(x)}{x^2}$

l $y = \frac{\ln(x)}{1-x^2}$

18 Differentieer de volgende functies.

a $y = \frac{x}{\cos(x)}$

e $y = \frac{1+\cos(x)}{x}$

i $y = \frac{2\cos(x)}{\sin(x)}$

b $y = \frac{\sqrt{2x+1}}{x}$

f $y = \frac{5+\ln(x)}{x}$

j $y = \frac{x^2-4}{e^x}$

c $y = \frac{\sin(x)}{\sqrt{x}}$

g $y = \frac{^3\log(x)}{x\sqrt{x}}$

k $y = \frac{2x+x^3}{\ln(x)}$

d $y = \frac{\sin(x)}{\cos(x)}$

h $y = \frac{\cos(2x)}{x}$

l $y = \frac{1+2^x}{x^2 \cdot \sqrt{x}}$

19 Differentieer de volgende functies.

a $y = x + \frac{1}{x}$

e $y = \left(\frac{x-1}{x+1}\right)^5$

i $y = \frac{x^2+3x-4}{x^2+2x+1}$

b $y = \frac{x^3+1}{2x+3}$

f $y = \frac{\cos(5x)}{x^2+1}$

j $y = \frac{x \sin(x)}{\cos(x)}$

c $y = x^2 - \frac{1}{\sin(x)}$

g $y = \frac{1+\sqrt{x}}{\sqrt{x}}$

k $y = \frac{1-e^{2x}}{x^2-1}$

d $y = \frac{x^2-7}{x^2+1}$

h $y = \frac{1-x^2}{\log(x)}$

l $y = \frac{^2\log(x)}{^4\log(x)}$

12 Differentiëren

12.7 Stijgen, dalen, extreme waarden

De afgeleide geeft je in ieder punt van de grafiek de richtingscoëfficiënt van de raaklijn. Daarmee is de afgeleide een geschikt hulpmiddel om het gedrag van een functie te bestuderen. Waar stijgt of daalt een functie; waar liggen de maxima en minima? Maxima en minima heten samen **extreme waarden**. Een schema voor het tekenverloop van $f'(x)$ is daarbij handig.

Eigenschappen

- 1 Als $f'(x) > 0$, dan stijgt de functie.
- 2 Als $f'(x) < 0$, dan daalt de functie.
- 3 Als $f'(x) = 0$, dan stijgt of daalt de functie niet: dan vind je een maximum of een minimum als f' van teken wisselt.

Voorbeeld

- 1 Hiernaast staat een schermafbeelding van de grafiek van $y = 3x^4 - 4x^3$. Controleer wat de extreme waarden zijn door het tekenverloop van de afgeleide te bepalen.



$$y' = 12x^3 - 12x^2.$$

$$y' = 0 \Leftrightarrow 12x^3 - 12x^2 = 0 \Leftrightarrow 12x^2(x-1) = 0 \Leftrightarrow x = 0 \text{ of } x = 1.$$

Het teken van $12x^2(x-1)$ verandert alleen bij $x=1$. Hieronder zie je het verband tussen het teken van y' en het dalen of stijgen van y . Links van $x=1$ daalt y ; rechts van $x=1$ stijgt y .

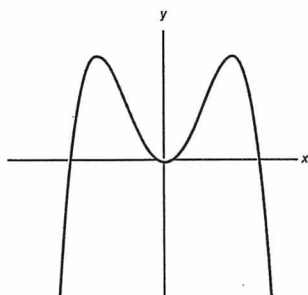
x -waarde	0			1		
Teken van y'	-	-	-	0	-	-
Gedrag van y	dalend			0	stijgend	

Aan het tekenverloop van y' zie je dat y in $(1, -1)$ een minimum heeft, maar in $(0, 0)$ alleen maar even horizontaal loopt en daarna weer verder daalt.

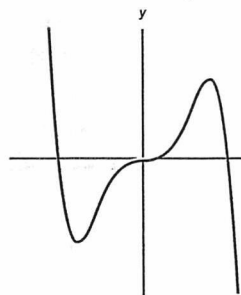
Opgaven

- 20** Hieronder zijn de grafieken van twee functies getekend en het tekenverloop van de afgeleiden van beide functies. Bepaal welke paren bij elkaar horen.

functie 1:



functie 2:



$f(x) = 0$
Info snijpunt x-ov

$f'(x) = 0$
→ waandalpiek

$f''(x) = +$ - stijgend dalend.

$f''(x)$ bepalen extreme punten, buigpunten

Tekenverloop afgeleide 1:

+ + 0 - - - 0 + + + 0 - -

Tekenverloop afgeleide 2:

- - 0 + + + 0 + + + 0 - -

- 21** Bereken voor elk van de volgende functies:

- het tekenverloop van de afgeleide functie;
- het gedrag van de functie (dat betekent stijgen en dalen);
- de maxima en minima (indien aanwezig).

(Maak eventueel een grafiek met de GR als hulp.)

a $f(x) = x^3 - 3x$

f $f(x) = (x-1)(x^2+1)$

b $f(x) = x^4 - 8x^2$

g $f(x) = (x^2-1)(x^2-4)$

c $f(x) = x \ln(x)$

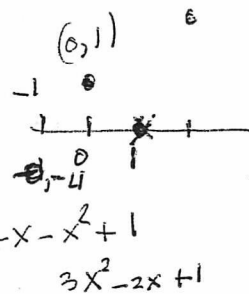
h $f(x) = \ln(1+(x+1)^2)$

d $f(x) = \frac{x-1}{x^2+3}$

i $f(x) = \frac{4-x^2}{x^2+1}$

e $f(x) = x^2 \cdot e^x$

j $f(x) = e^{x^2-3x}$



12 Differentiëren

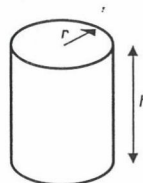
12.8 Toepassingen

Je gebruikt afgeleiden vaak in toepassingen die met optimalisering te maken hebben. Wanneer is de opbrengst het grootst of wanneer is het verbruik minimaal? Dit zijn voorbeelden van veel gestelde vragen.

Voorbeelden

- 1 Wat zijn de afmetingen van een 1 literblik waar je de minste hoeveelheid materiaal voor nodig hebt.

Vertaald naar de wiskunde is de vraag: bepaal r en h zo, dat het oppervlak minimaal is bij een volume van 1 liter. Met r en h in cm, moet je voor de inhoud 1000 cm^3 nemen.



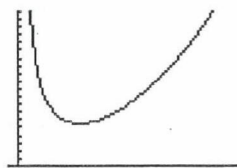
Volume: $V = \pi r^2 h = 1000 \Leftrightarrow h = \frac{1000}{\pi r^2}$.

Oppervlakte: $O = \pi r^2 + \pi r^2 + 2\pi r h$ (deksel + bodem + mantel)

$$O = 2\pi r^2 + 2\pi r \cdot \frac{1000}{\pi r^2}$$

$$O = 2\pi r^2 + \frac{2000}{r}$$

De grafiek van de oppervlakte O is hiernaast getekend (schermafdruck GR), voor $r > 0$.



Het minimum vind je door de afgeleide nul te stellen:

$$O' = 4\pi r - \frac{2000}{r^2} = 0 \Leftrightarrow 4\pi r = \frac{2000}{r^2} \Leftrightarrow r^3 = \frac{2000}{4\pi} \Leftrightarrow r = 5,42 \text{ cm.}$$

En de bijbehorende hoogte is: $h = \frac{1000}{\pi r^2} = 10,84 \text{ cm.}$

- 2 Voor een bepaald product zijn de kosten K , als functie van het geproduceerde aantal q , bepaald als:

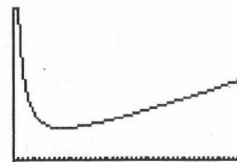
$$K(q) = 0,01q^2 + 12000 \quad (\text{som van variabele kosten en vaste kosten}).$$

Voor welk aantal zijn de gemiddelde kosten per product minimaal?

$$GK(q) = \frac{K(q)}{q} = 0,01q + \frac{12000}{q}$$

De grafiek van $GK(q)$ is hiernaast getekend.

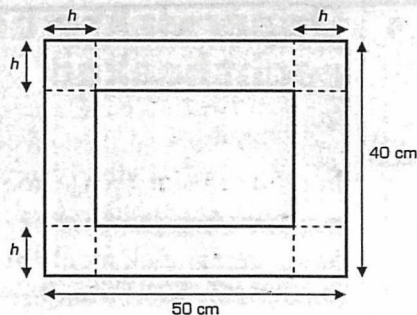
Het minimum vind je door de afgeleide nul te stellen:



$$GK' = 0,01 - \frac{12000}{q^2} = 0 \Leftrightarrow 0,01 = \frac{12000}{q^2} \Leftrightarrow q^2 = \frac{12000}{0,01} \Leftrightarrow q = 1095.$$

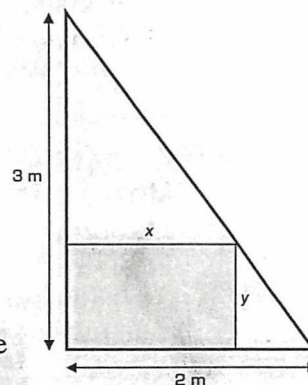
Opgaven

- 22** Van een stuk karton van 40 bij 50 cm wordt een bak gevormd, door in iedere hoek een vierkantje met zijde h weg te nemen en vervolgens over de lijnen om te vouwen. (zie de afbeelding)



Bereken de maximale inhoud van de bak.

- 23** Onder een schuin dak moet een zo groot mogelijke rechthoekige kast worden geplaatst. Een dwarsdoorsnede is hiernaast afgebeeld. De diepte van de kast wordt x en de hoogte van de kast wordt y genoemd.



Bereken de maximale oppervlakte van de gekleurde rechthoek.

Hint: Kies een assenstelsel met de assen langs de beide rechthoekszijden en bepaal hoe y van x afhangt door een functievoorschrift van de schuine zijde op te stellen.

- 24** Een vis die tegen de stroom in zwemt, verbruikt energie. Hoe harder de vis zwemt, hoe meer energie hij verbruikt. Voor een bepaalde vissoort is de volgende formule bepaald:

$$U(v) = \frac{1}{2} \frac{v^3}{v-s}, \text{ waarin:}$$

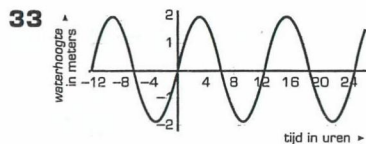
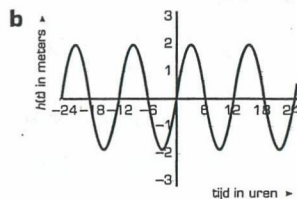
U de energie per kilometer ten opzichte van de oever;
 v de snelheid van de vis ten opzichte van het water;
 s de stroomsnelheid is van het water.

Teken de grafiek van de functie $U(v)$ voor een rivier met $s = 2$ km/uur. Voor welke waarden van v is dit een zinvolle grafiek?

Bereken de optimale snelheid, dat wil zeggen de snelheid ten opzichte van de wal zo, dat U minimaal is.

31 $V(t) = 230 \sin(100\pi t)$

32 a $h(t) = 1,91 \cdot \sin\left(\frac{24}{149}\pi t\right)$



a $x = 0,30 + k \cdot 2\pi$ of $x = 2,84 + k \cdot 2\pi$

b $x = 1,77 + k \cdot 2\pi$ of $x = -1,77 + k \cdot 2\pi$

c $x = -0,52 + k \cdot 2\pi$ of $x = 3,67 + k \cdot 2\pi$

d $x = -0,15 + k \cdot \pi$ of $x = 1,72 + k \cdot \pi$

e $x = -0,42 + k \cdot \frac{2}{3}\pi$ of $x = 1,46 + k \cdot \frac{2}{3}\pi$

f $x = 1,09 + k \cdot \frac{1}{2}\pi$ of $x = -0,087 + k \cdot \frac{1}{2}\pi$

g $x = -0,78 + k \cdot 2\pi$ of $x = 3,92 + k \cdot 2\pi$

h $x = 2,19 + k \cdot \frac{1}{2}\pi$

i $x = -0,41 + k \cdot \pi$

j $x = -0,32 + k \cdot \pi$ of $x = -2,82 + k \cdot \pi$

34 a Omdat de sinusgrafiek tussen -3 en 3 blijft slingeren

b $x = 2$ invullen levert bij beide

$y = 0$, dus snijpunt $(2, 0)$

c $x = 4,68$ en $x = -0,68$

35 a $x = -0,89$ b $x = 1,46$

c $x = 3,09$ d $x = 1,79$

e $x = -2,13$ f $x = -0,20$

g $x = 1,51$ h $x = -30,5$ of $x = -20,1$ of $x = -12,7$

36 a 31% b 10° c 22°

37 a $\alpha = 37^\circ$, $\beta = 100^\circ$

b $b = 11,5$; $c = 9,5$

c $a = 32,6$; $b = 44,1$

38 a $AC = 82,6$ m b $CD = 74,9$ m

39 106,9 kN

40 zie uitwerkingen

41 a, b en c zie uitwerkingen

d $\sin(x) = \sin(180^\circ - x)$

42 a $b = 35,6$; $\alpha = 82^\circ$

b $\alpha = 14^\circ$; $\beta = 132^\circ$; $\gamma = 34^\circ$

c $c = 72,6$; $\alpha = 20^\circ$

d $\alpha = 117^\circ$; $\beta = 24^\circ$; $\gamma = 39^\circ$

43 a = 6,8 of $a = 22,8$

44 $F_R = 108,3$ N

45 a $PR = 128,7$ m b $\angle P = 28,5^\circ$; $\angle R = 23,5^\circ$

46 zie uitwerkingen

12 Differentiëren

1 a $y = -6x - 24$, $y = -9$, $y = 2x - 8$
en $y = 6x - 12$

b $y = 5x + 12$, $y = 2x + 4\frac{1}{2}$, $y = 4\frac{1}{2}$
en $y = -3x + 12$

c $y = 0,09x + 0,38$, $y = 0,69x + 1$,
 $y = 1,39x + 0,61$ en $5,55x - 8,64$

d $y = 5x - 2,61$, $y = x - 1$,
 $y = \frac{1}{2}x - 0,31$ en $y = \frac{1}{3}x + 0,61$

e $y = 2x + \frac{2}{3}\pi$, $y = x + \sqrt{3}$, $y = 2$
en $y = -1,73x + 3,72$

f $y = 12x - 23$, $y = 48x$, $y = 64$
en $y = -48x + 192$

2 a F; b E; c C; d B; e D; f A

3 $f'(x) = 3x^2$

4 $\frac{\sin(x_A + a) - \sin(x_A)}{a}$ en

$\frac{e^{x_A+a} - e^{x_A}}{a} = \frac{e^{x_A}(e^a - 1)}{a}$

5 a $y' = 0$ b $y' = 1$ c $y' = 4x^3$

d $y' = 0$ e $y' = 6x$

f $y' = -4x^{-5}$ g $y' = -6x^{-3}$

h $y' = -\frac{2}{x^3}$ i $y' = 2^x \ln 2$

Antwoorden

- j** $y' = \frac{1}{x \ln 3}$ **k** $y' = 5e^x$ **l** $y' = \frac{-3}{x}$
6 a $\frac{dy}{dx} = 0$ **b** $\frac{dy}{dx} = 1$ **c** $\frac{dy}{dx} = \frac{1}{2}$
d $\frac{dy}{dx} = 4x$ **e** $\frac{dy}{dx} = \frac{1}{\sqrt{x}}$
f $\frac{dy}{dx} = -6x^2$
g $\frac{dy}{dx} = 2 \cos(x)$ **h** $\frac{dy}{dx} = \sin(x)$
i $\frac{dy}{dx} = \frac{3}{2} \sqrt{x}$ **j** $\frac{dy}{dx} = -\frac{1}{2x\sqrt{x}}$
k $\frac{dy}{dx} = -\frac{1}{x^4}$ **l** $\frac{dy}{dx} = -\frac{15}{2x^2\sqrt{x}}$
7 a $y' = 3 \cos(x)$ **b** $y' = \cos(x)$
c $y' = -2^x \ln(2)$ **d** $y' = 5e^x$
e $y' = -2^x \ln(2)$ **f** $y' = \frac{1}{x \ln(10)}$
g $y' = \frac{3}{x}$ **h** $y' = -\frac{5}{x \ln(10)}$
i $y' = -2e^x$ **j** $y' = \frac{1}{x \ln(2)}$
k $y' = 5 \cdot (1,07)^x \ln(1,07)$
l $y' = 2 \cdot 10^x \ln(10)$
8 a $f'(x) = 0$ **b** $g'(x) = 6$
c $h'(t) = \frac{1}{3} \sin(t)$ **d** $j'(a) = \cos(a)$
e $k'(x) = \sqrt{3}$
f $p'(h) = 100 \cdot \left(\frac{4}{5}\right)^h \ln\left(\frac{4}{5}\right)$
g $T'(t) = -40 \left(\frac{1}{2}\right)^t \ln\left(\frac{1}{2}\right)$
h $W'(v) = \frac{2}{v \ln(3)}$
9 a $y' = 12x^3 - 2$ **b** $y' = -3x^2 + \frac{6}{x^3}$
c $y' = -2x^{-3} - x^{-2}$
- d** $y' = -2 + \frac{5}{2\sqrt{x}}$
e $y' = 3x^2 + 2 + 9x^{-4}$
f $y' = -\frac{1}{x^3} + \frac{3}{x^6}$
g $y' = \frac{1}{\sqrt{x}} + \frac{3}{2}\sqrt{x}$
h $y' = \cos(x) - \sin(x)$
i $y' = \cos(x) + \sin(x)$
j $y' = 1 - 3 \sin(x)$
k $y' = -\frac{1}{x^2} + \left(\frac{1}{2}\right)^x \ln\left(\frac{1}{2}\right)$
l $y' = \frac{1}{2\sqrt{x}} - \frac{1}{x \ln(2)}$
10 a $f'(x) = \sqrt{3} + \frac{3}{2\sqrt{x}}$
b $g'(t) = 1 + \frac{1}{3} \sin(t)$
c $h'(x) = 2x + 3$
d $j'(x) = 5\sqrt{2} \left(1 - \frac{1}{x}\right)$
e $k'(x) = 2x(x^3 + 2x^2 + 1) + (x^2 - 1)(3x^2 + 4x)$
f $n'(x) = 10ax$
g $p'(h) = 6h - 2 \cdot 3^h \ln(3)$
h $s'(t) = 2at + \frac{1}{2}g$
i $T'(t) = 3\sqrt{t} - \frac{1}{2t\sqrt{t}}$
j $V'(s) = (2s+1)\left(2s - \frac{1}{s}\right) + (s^2 + s + 1)\left(2 + \frac{1}{s^2}\right)$
11 a $y' = \sin(x) + x \cos(x)$
b $y' = e^x + x \cdot e^x$ **c** $y' = \ln(x)$
d $y' = \frac{\cos(x)}{2\sqrt{x}} - \sqrt{x} \cdot \sin(x)$
e $y' = 2 \cos^2(x) - 2 \sin^2(x)$
f $y' = 2x \cos(x) - x^2 \sin(x)$
g $y' = 2xe^x + x^2e^x$

$$\mathbf{h} \ y' = \log(x) + \frac{1}{\ln(10)}$$

$$\mathbf{i} \ y' = 2x \cdot \log(x) + \frac{x}{\ln(10)}$$

$$\mathbf{j} \ y' = 6x \cdot 2^x + 3x^2 \cdot 2^x \ln(2)$$

$$\mathbf{k} \ y' = {}^3\log(x) + \frac{x-1}{x \ln(3)}$$

$$\mathbf{l} \ y' = 2e^x \ln(x) + \frac{2e^x + 1}{x}$$

$$\mathbf{12a} \ f'(x) = 5x^4 \cdot {}^5\log(x) + \frac{x^4}{\ln(5)}$$

$$\mathbf{b} \ g'(y) = \frac{y+2 \sin(y)}{\sqrt{y}} + 2\sqrt{y}(1+2 \cos(y))$$

$$\mathbf{c} \ h'(t) = 6 \cos^2(t) - 6 \sin^2(t)$$

$$\mathbf{d} \ k'(x) = \frac{1}{10} e^x \left(1 - \frac{2}{x^2} \right) + \frac{1}{10} e^x \cdot \frac{4}{x^3}$$

$$\mathbf{e} \ m'(n) = 3\left(\frac{1}{5}\right)^n (n+1) \ln\left(\frac{1}{5}\right) + 3\left(\frac{1}{5}\right)^n$$

$$\mathbf{f} \ n'(t) = -3t^{-4} \cdot \sin(t) + t^{-3} \cdot \cos(t)$$

$$\mathbf{g} \ p'(a) = \frac{3}{2} \sqrt{a} \cdot 2^a + a \sqrt{a} \cdot 2^a \ln(2)$$

$$\mathbf{h} \ V'(t) = 1 + \frac{1}{t^2} + \left(1 - \frac{1}{t^2} \right) \ln(t)$$

$$\mathbf{13a} \ y' = 3 \cos(3x)$$

$$\mathbf{b} \ y' = -6 \sin(2x)$$

$$\mathbf{c} \ y' = 16(2x+1)^7 \quad \mathbf{d} \ y' = 2e^{2x}$$

$$\mathbf{e} \ y' = 2\pi \cos(2\pi x) \quad \mathbf{f} \ y' = \frac{1}{x}$$

$$\mathbf{g} \ y' = -\frac{1}{2} e^{-x} \quad \mathbf{h} \ y' = \frac{1}{x \ln(10)}$$

$$\mathbf{i} \ y' = -3(1-x)^2 \quad \mathbf{j} \ y' = -2^{-x} \ln(2)$$

$$\mathbf{k} \ y' = -10e^{-5x}$$

$$\mathbf{l} \ y' = -6(1-2x)^2$$

$$\mathbf{14a} \ y' = 1 + 2 \cos(2x)$$

$$\mathbf{b} \ y' = 2x - e^x$$

$$\mathbf{c} \ y' = 1 + \frac{1}{\sqrt{2x}}$$

$$\mathbf{d} \ y' = -\frac{1}{x^2} + \frac{1}{x \cdot \ln(10)}$$

$$\mathbf{e} \ y' = 2 \cos(2x) + 3 \sin(3x)$$

$$\mathbf{f} \ y' = -5(1-x)^4 + 6x^5$$

$$\mathbf{g} \ y' = 1 - \frac{1}{2\sqrt{1-x}}$$

$$\mathbf{h} \ y' = -3 \cdot 5^{1-3x} \ln(5) \quad \mathbf{i} \ y' = \frac{2x}{x^2+1}$$

$$\mathbf{j} \ y' = 2x - e^{1-x}$$

$$\mathbf{k} \ y' = 2 \cos\left(2x + \frac{1}{3}\pi\right)$$

$$\mathbf{l} \ y' = 10 \cdot 3^{2x} \cdot \ln(3)$$

$$\mathbf{15a} \ f'(x) = 15x^2 (x^3+2)^4$$

$$\mathbf{b} \ f'(t) = -6t(3-t^2)^2$$

$$\mathbf{c} \ f'(x) = -\frac{12x}{(1+2x^2)^4}$$

$$\mathbf{d} \ f'(t) = 2t \cos(t^2+1)$$

$$\mathbf{e} \ f'(x) = 24x(2x^2+1)^5$$

$$\mathbf{f} \ f'(t) = -\frac{t}{\sqrt{1-t^2}}$$

$$\mathbf{g} \ f'(x) = \frac{5 \cos(2\sqrt{x})}{\sqrt{x}}$$

$$\mathbf{h} \ f'(t) = -\frac{3}{2\sqrt{t}(1-\sqrt{t})}$$

$$\mathbf{i} \ f'(x) = \frac{1}{x^2} \sin\left(\frac{1}{x}\right)$$

$$\mathbf{j} \ f'(t) = -2t \cdot 2^{1-t^2} \ln(2)$$

$$\mathbf{k} \ f'(x) = -\frac{1}{(1-x) \ln(10)}$$

$$\mathbf{l} \ f'(t) = \frac{1}{t \ln(3)}$$

$$\mathbf{16a} \ y' = \sin(2x) + 2x \cos(2x)$$

$$\mathbf{b} \ y' = 2x \cdot e^x + x^2 \cdot e^x$$

$$\mathbf{c} \ y' = \sqrt{2x} + \frac{x}{\sqrt{2x}}$$

$$\mathbf{d} \ y' = \ln(x) + 1$$

$$\mathbf{e} \ y' = 2 \cos(2x) \cdot \cos(3x) - 3 \sin(2x) \cdot \sin(3x)$$

$$\mathbf{f} \ y' = 2x \cdot {}^5\log(1-x) - x^2 \cdot \frac{1}{(1-x) \ln(5)}$$

$$\mathbf{g} \ y' = \frac{(2x+1) \ln(x)}{2\sqrt{x^2+x}} + \frac{\sqrt{x^2+x}}{x}$$

Antwoorden

$$h \ y' = -\frac{1}{x^2} \log(5x) + \frac{1}{x^2 \ln(10)}$$

$$i \ y' = -3(1-x)^2 e^x + (1-x)^3 e^x$$

$$j \ y' = 6x^2 \sin(\pi x) + 2\pi x^3 \cos(\pi x)$$

$$k \ y' = -\frac{2x \cos(x)}{(x^2+1)^2} - \frac{\sin(x)}{x^2+1}$$

$$l \ y' = \frac{(x^2+1) \sin(x)}{\cos^2(x)} + \frac{2x}{\cos(x)}$$

$$17a \ y' = \frac{1}{x-1} - \frac{x+1}{(x-1)^2} = -\frac{2}{(x-1)^2}$$

$$b \ y' = -\frac{\sin(x)}{x} - \frac{\cos(x)}{x^2}$$

$$c \ y' = \frac{1-\ln(x)}{x^2}$$

$$d \ y' = -\frac{1}{(x+1)^2}$$

$$e \ y' = \frac{2x}{x+1} - \frac{x^2+1}{(x+1)^2}$$

$$f \ y' = \frac{1}{2x+1} - \frac{2x}{(2x+1)^2} = \frac{1}{(2x+1)^2}$$

$$g \ y' = \frac{3e^x}{x-1} - \frac{3e^x}{(x-1)^2} = \frac{3e^x(x-2)}{(x-1)^2}$$

$$h \ y' = \frac{1}{x^3 \ln(10)} - \frac{2 \log(x)}{x^3}$$

$$i \ y' = \frac{1}{2-x} + \frac{2+x}{(2-x)^2} = \frac{4}{(2-x)^2}$$

$$j \ y' = \frac{\cos(x)}{x+1} - \frac{\sin(x)}{(x+1)^2}$$

$$k \ y' = -\frac{3e^{-x}}{3x+1} - \frac{9e^{-x}}{(3x+1)^2}$$

$$l \ y' = \frac{1}{x(1-x^2)} + \frac{2x \ln(x)}{(1-x^2)^2}$$

$$18a \ y' = \frac{1}{\cos(x)} + \frac{x \sin(x)}{\cos^2(x)} = \frac{\cos(x) + x \sin(x)}{\cos^2(x)}$$

$$b \ y' = \frac{1}{x\sqrt{2x+1}} - \frac{\sqrt{2x+1}}{x^2}$$

$$c \ y' = \frac{\cos(x)}{\sqrt{x}} - \frac{\sin(x)}{2x\sqrt{x}}$$

$$d \ y' = \frac{1}{\cos^2(x)}$$

$$e \ y' = -\frac{\sin(x)}{x} - \frac{1+\cos(x)}{x^2}$$

$$f \ y' = \frac{1}{x^2} - \frac{5+\ln(x)}{x^2} = -\frac{4+\ln(x)}{x^2}$$

$$g \ y' = \frac{1}{x^2 \sqrt{x} \cdot \ln(3)} - \frac{3 \cdot {}^3\log(x)}{2x^2 \sqrt{x}}$$

$$h \ y' = -\frac{2 \sin(2x)}{x} - \frac{\cos(2x)}{x^2}$$

$$i \ y' = -2 - \frac{2 \cos^2(x)}{\sin^2(x)} = -\frac{2}{\sin^2(x)}$$

$$j \ y' = \frac{2x}{e^x} - \frac{x^2-4}{e^x}$$

$$k \ y' = \frac{2+3x^2}{\ln(x)} - \frac{2+x^2}{(\ln x)^2}$$

$$l \ y' = \frac{2^x \ln(2)}{x^2 \sqrt{x}} - \frac{5(1+2^x)}{2x^3 \sqrt{x}}$$

$$19a \ y' = 1 - \frac{1}{x^2}$$

$$b \ y' = \frac{3x^2}{2x+3} - \frac{2(x^3+1)}{(2x+3)^2} = \frac{4x^3+9x^2-2}{(2x+3)^2}$$

$$c \ y' = 2x + \frac{\cos(x)}{\sin^2(x)}$$

$$d \ y' = \frac{2x}{x^2+1} - \frac{2x(x^2-7)}{(x^2+1)^2} = \frac{16x}{(x^2+1)^2}$$

$$e \ y' = 5 \left(\frac{x-1}{x+1} \right)^4 \cdot \frac{2}{(x+1)^2} = \frac{10(x-1)^4}{(x+1)^6}$$

$$f \ y' = -\frac{5 \sin(5x)}{x^2+1} - \frac{2x \cos(5x)}{(x^2+1)^2}$$

$$g \ y' = -\frac{1}{2x\sqrt{x}}$$

$$h \ y' = -\frac{2x}{\log(x)} - \frac{1-x^2}{x(\log x)^2 \ln(10)}$$

$$i \ y' = -\frac{x-11}{(x+1)^3}$$

$$j \ y' = \frac{x \cos(x) + \sin(x)}{\cos(x)} + \frac{x \sin^2(x)}{\cos^2(x)}$$

$$k \quad y' = -\frac{2e^{2x}}{x^2-1} - \frac{2x(1-e^{2x})}{(x^2-1)^2}$$

$$l \quad y' = 0$$

20 functie 1 – afgeleide 1 en
functie 2 – afgeleide 2

21 a

x		-1		1	
teken f'	+	+	0	-	-
gedrag f	st		da		st

maximum in $(-1, 2)$;

minimum in $(1, -2)$

b

x		-2		0		2	
teken f'	-	-	0	+	0	-	+
gedrag f	da		st		da		st

maximum in $(0, 0)$;

minima in $(-2, -16)$ en $(2, -16)$

c

x				$\frac{1}{e}$		
teken f'	-	-	-	0	+	+
gedrag f	da			st		st

minimum in $(\frac{1}{e}, -\frac{1}{e})$

d

x		-1		3	
teken f'	-	-	0	+	+
gedrag f	da		st		da

maximum: $(3, \frac{1}{6})$;

minimum: $(-1, -\frac{1}{2})$

e

x		-2		0	
teken f'	+	+	0	-	-
gedrag f	st		da		st

maximum: $(-2, 4e^{-2})$;

minimum: $(0, 0)$

f Deze functie stijgt overal.

Er zijn geen extreme waarden

g

x		-1,6		0		1,6	
teken f'	-	-	0	+	0	-	-
gedrag f	da		st		da		st

maximum: $(0, 0)$;

minima: $(-\frac{1}{2}\sqrt{10}, -2\frac{1}{4})$ en $(\frac{1}{2}\sqrt{10}, -2\frac{1}{4})$

h

x		-1			
teken f'	-	-	-	0	+
gedrag f	da			st	

maximum: geen;

minimum: $(-1, 0)$

i

x		0			
teken f'	+	+	+	0	-
gedrag f	st			da	

maximum: $(0, 4)$;

minimum: geen

j

x		$\frac{3}{2}$			
teken f'	-	-	-	0	+
gedrag f	da			st	

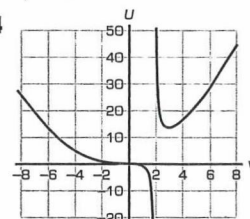
maximum: geen;

minimum: $(\frac{3}{2}, e^{-\frac{9}{4}})$

22 $6564,2 \text{ cm}^3$

23 $1,5 \text{ m}^2$

24



Grafiek is zinvol voor $v > 2$.

$v_{\text{opt}} = 3 \text{ km/uur}$

