

7 Machten

In hoofdstuk 6 heb je al met machten gewerkt. Hier ben je onder andere de volgende regel tegengekomen: $a^n \times a^m = a^{n+m}$. (Zie regel 6.6)

In dit hoofdstuk gaan we dieper in op het werken met machten, waarbij de *grondtallen gelijk* zijn. Verder nemen we aan dat alle grondtallen ongelijk aan 0 zijn.

Het mag duidelijk zijn dat het volgende waar is: $\frac{a}{a} = \frac{\cancel{a}}{\cancel{a}} = 1$. Als je dus een breuk hebt, waarin

zowel in de teller als ook in de noemer *een zelfde factor* voorkomt, dan mag je deze factoren tegen elkaar wegdelen. (Eerst vermenigvuldigen met een getal, ongelijk aan nul, en vervolgens delen door *hetzelfde getal* heeft netto gezien geen enkel effect).

Om deze reden kun je $\frac{a^5}{a^3}$ als volgt oplossen: $\frac{a^5}{a^3} = \frac{\cancel{a} \times \cancel{a} \times \cancel{a} \times a \times a}{\cancel{a} \times \cancel{a} \times \cancel{a}} = \frac{a \times a}{1} = a^2$. Omdat de

onbekende a zowel boven als onder de grote horizontale breukstreep dezelfde waarde voorstelt, mag je deze *factoren* tegen elkaar wegdelen. Je kunt hetzelfde resultaat sneller bereiken door regel 7.1 toe te passen.

Regel 7.1 Als $a \neq 0$ dan geldt: $\frac{a^n}{a^m} = a^{n-m}$

Toelichting:

1. Met de notatie: a^{n-m} bedoelen we: $a^{(n-m)}$, maar we laten de haakjes altijd weg.
2. Let op notatieverschil: $a^{2-3} = a^{(2-3)}$ en $a^2 - 3 = (a^2) - 3$ m.b.v. de grootte van cijfers geven we impliciet de haakjes aan.

Voorbeeld 7.1 Pas de regel toe op het bovenstaande voorbeeld en je vindt: $\frac{a^5}{a^3} = a^{5-3} = a^2$. Je trekt bij het delen van getallen met hetzelfde grondtal de exponenten van elkaar af.

Voorbeeld 7.2

1. $\frac{2^{10}}{2^8} = 2^{10-8} = 2^2$
2. $\frac{p^8}{p} = \frac{p^8}{p^1} = p^{8-1} = p^7$
3. $\frac{a^9 b^7}{a^3 b^4} = \frac{a^9}{a^3} \times \frac{b^7}{b^4} = a^{9-3} \times b^{7-4} = a^6 \times b^3 = a^6 b^3$
4. $\frac{(x+2y)^8}{(x+2y)^5} = (x+2y)^{8-5} = (x+2y)^3$ (Aanwijzing: de groep $(x+2y)$ is een *factor*)
5. $\frac{k^3}{n^5}$ Kan niet verder berekend worden, omdat k en n géén gelijke getallen hoeven voor te stellen.

Opdracht 7.1 Bereken met behulp van regel 7.1:

- a. $\frac{3^7}{3^2} =$
- b. $\frac{5^8}{5^6} =$
- c. $\frac{7^4}{7} =$
- d. $\frac{10^8}{10^2} =$

Opdracht 7.2 Bereken met behulp van regel 7.1:

- a. $\frac{a^7}{a^2} =$
- b. $\frac{b^8}{b^6} =$
- c. $\frac{c^4}{c} =$
- d. $\frac{d^8}{d^2} =$

Opdracht 7.3 Bereken met behulp van regel 7.1

- a. $\frac{x^9}{x^4} =$
- b. $\frac{c^8}{c} =$
- c. $\frac{a^{10}b^7c^5}{a^3b^4c^2} =$
- d. $\frac{p^6q^2}{p^4r^5} =$
- e. $\frac{(a-b)^5}{(a-b)^3} =$

Ook als je met wetenschappelijke notatie werkt, dan kun je regel 7.1 toepassen. Zo is:

$$\frac{8 \cdot 10^7}{4 \cdot 10^2} = \frac{8}{4} \times \frac{10^7}{10^2} = 2 \times 10^{7-2} = 2 \cdot 10^5$$

Opdracht 7.4 Werk op dezelfde manier als hierboven uit:

- a. $\frac{6 \cdot 10^{15}}{4 \cdot 10^6} =$
- b. $\frac{9 \cdot 10^9}{2 \cdot 10^4} =$

Voorbeeld 7.3

Als je de volgende berekening maakt: $(a^3)^4 = \underbrace{a^3 \times a^3 \times a^3 \times a^3}_{\text{komt 4 maal voor}} = a^{\overbrace{3+3+3+3}^{4 \times}} = a^{3 \times 4} = a^{12}$. Uit deze redenering kun je de volgende regel afleiden.

Regel 7.2	$(a^n)^m = a^{n \times m}$
------------------	----------------------------

Toelichting:

1. Bij een machtsverheffing van een machtsverheffing mag je de exponenten dus met elkaar vermenigvuldigen.
2. Met de notatie: $a^{n \times m}$ bedoelen we: $a^{(n \times m)}$, maar we laten de haakjes altijd weg.
3. Zo geldt ook: $((a+b)^2)^3 = (a+b)^{2 \times 3} = (a+b)^6$
4. In het algemeen geldt: $(a+b)^n \neq a^n + b^n$ (Als $n \neq 1$). We geven een voorbeeld:
 $(3+4)^2 \neq 3^2 + 4^2$, want: $7^2 \neq 9+16$, want: $49 \neq 25$

 Voor de uitdrukking: $a^n + a^m$ bestaat géén rekenregel! Je dient afzonderlijk a^n en a^m uit te rekenen, daarna kun je pas de optelling uitvoeren.

 Je past rekenregels ook toe bij het vereenvoudigen van eenheden.

Voorbeeld: $m/s^2 \times s = \frac{m}{s^2} \times s = \frac{m}{s}$.

Opdracht 7.5 Bereken met behulp van regel 7.2:

- $(5^2)^3 =$
- $(7^3)^4 =$
- $(2^5)^6 =$
- $(10^4)^7 =$

Opdracht 7.6 Bereken met behulp van regel 7.2

- $(p^4)^8 =$
- $(a^2)^7 =$
- $(x^{12})^3 =$
- $(y)^8 =$
- $((p+q)^5)^6 =$

Bij het toepassen van regel 7.1 kun je in sommige gevallen onverwachte notaties tegenkomen. We geven hiervan voorbeelden.

Voorbeeld 7.4

$\frac{a^4}{a^4} = a^{4-4} = a^0$. Maar je kunt natuurlijk ook de volgende berekening maken:

$\frac{a^4}{a^4} = \frac{\cancel{a} \times \cancel{a} \times \cancel{a} \times \cancel{a}}{\cancel{a} \times \cancel{a} \times \cancel{a} \times \cancel{a}} = \frac{1}{1} = 1$. Uit een berekening kan maar één antwoord komen. Dit leggen we vast in regel 7.3

Regel 7.3 $a^0 = 1$

Voorbeeld 7.5

$\frac{a^4}{a^7} = a^{4-7} = a^{-3}$. Maar je kunt natuurlijk ook de volgende berekening maken:

$\frac{a^4}{a^7} = \frac{\cancel{a} \times \cancel{a} \times \cancel{a} \times \cancel{a}}{\cancel{a} \times \cancel{a} \times \cancel{a} \times \cancel{a} \times a \times a \times a} = \frac{1}{a^3}$. Ook hier geldt weer, dat uit een berekening maar één antwoord kan komen. Dit leggen we vast in regel 7.4

Regel 7.4 $a^{-n} = \frac{1}{a^n}$

-  De vormen a^0 en a^{-n} noemen we *oneigenlijke machten*. Deze mogen standaard **nooit** in een eindantwoord voorkomen. Ze worden wel volop in *tussenberekeningen* gebruikt. De oneigenlijke machten dien je in de einduitkomst terug te brengen tot eigenlijke machten, via de regels 7.3 en 7.4
-  In wetenschappelijke notatie worden *wel* oneigenlijke machten gebruikt in een eindantwoord. Een notatie als: $2,43 \cdot 10^{-5}$ is volkomen legaal.
-  Opgelet: als je in wetenschappelijke notatie 10^0 vindt, dan is dit gelijk aan 1 en niet aan 10 ($=10^1$).

Voorbeeld 7.6

1. $\frac{x^9}{x^9} = x^{9-9} = x^0 = 1$
2. $\frac{a^7}{a^{10}} = a^{7-10} = a^{-3} = \frac{1}{a^3}$

Op deze manier worden oneigenlijke exponenten weer terug gebracht tot eigenlijke exponenten.

Opdracht 7.7 Bereken met behulp van regels 7.3 en 7.4:

a. $\frac{2^3}{2^5} =$

b. $\frac{3}{3^5} =$

c. $\frac{5^7}{5^7} =$

d. $\frac{10^2}{10^7} =$

Opdracht 7.8 Zorg ervoor dat de breukstreep verdwijnt met behulp van de rekenregels, in deze opdracht is het de bedoeling dat je juist *wel* de oneigenlijke machten in het eindantwoord laat staan.

a. $\frac{a^{10}b^5c^7}{a^8b^9c^7} =$

b. $\frac{1}{a^7} =$

c. $\frac{(2a-3b)^4}{(2a-3b)^9} =$

d. $\frac{p^5q^4}{q^7r} =$

e. $\frac{1}{b^{-5}} =$

f. $\frac{(x^3)^4 \cdot (y^5)^3}{(x^7)^3 \cdot (y^3)^5 \cdot (z^2)^6} =$

Als je $(ab)^3$ moet uitrekenen, dan is dit:

$(ab)^3 = ab \times ab \times ab = a \times a \times a \times b \times b \times b = a^3 \times b^3 = a^3b^3$. We veralgemenen dit in regel 7.5

Regel 7.5 $(a \times b)^n = a^n \times b^n$
--

Op soortgelijke wijze wordt $\left(\frac{a}{b}\right)^3$ berekend: $\left(\frac{a}{b}\right)^3 = \frac{a}{b} \times \frac{a}{b} \times \frac{a}{b} = \frac{a \times a \times a}{b \times b \times b} = \frac{a^3}{b^3}$. We nemen

even voor het gemak aan dat je weet hoe je breuken moet vermenigvuldigen, *dus teller maal teller en noemer maal noemer*. We komen uitgebreid terug op het werken met breuken in hoofdstuk 8. Hetgeen we hier hebben gedaan verwoorden we in regel 7.6

Regel 7.6 $\left(\frac{a}{b}\right)^n = \frac{a^n}{b^n}$

Voorbeeld 7.7

1. $(3x^5)^4 = (3)^4 \cdot (x^5)^4 = 3^{1 \times 4} \cdot x^{5 \times 4} = 3^4 \cdot x^{20} = 81x^{20}$
2. $(a^3b^4c^5)^6 = (a^3)^6 \cdot (b^4)^6 \cdot (c^5)^6 = a^{3 \times 6} \cdot b^{4 \times 6} \cdot c^{5 \times 6} = a^{18}b^{24}c^{30}$
3. $(a^4 \cdot (p-q)^5)^3 = (a^4)^3 \cdot ((p-q)^5)^3 = a^{4 \times 3} \cdot (p-q)^{5 \times 3} = a^{12} \cdot (p-q)^{15}$
4. $\left(\frac{a^3b}{c^5}\right)^4 = \frac{(a^3)^4 \cdot (b)^4}{(c^5)^4} = \frac{a^{3 \times 4} \cdot b^{1 \times 4}}{c^{5 \times 4}} = \frac{a^{12}b^4}{c^{20}}$
5. $\left(\frac{p^4}{q^3}\right)^{-5} = \frac{(p^4)^{-5}}{(q^3)^{-5}} = \frac{p^{4 \times -5}}{q^{3 \times -5}} = \frac{p^{-20}}{q^{-15}} = \frac{q^{15}}{p^{20}}$

Populair gezegd: als je het minteken in de exponent wilt wegwerken, dan verplaats je de macht naar de andere zijde van de breukstreep. Zie voorbeeld 7.7.5.

Opdracht 7.9 Bereken zonder dat de einduitkomsten oneigenlijke machten bevatten.

- a. $(5h^3)^2 \times (h^4)^5 =$
- b. $(a^2b^6)^3 \times (a^5c^4)^2 =$
- c. $\left(\frac{2x^4}{3y^3}\right)^5 =$
- d. $((x^3 + y^5)^3 \cdot (p^7 - q^5)^4)^8 =$

We gaan negatieve getallen machtsverheffen. Dit onderzoeken we aan de hand van een paar voorbeelden:

1. $(-1)^4 = -1 \times -1 \times -1 \times -1 = +1$
2. $(-1)^5 = -1 \times -1 \times -1 \times -1 \times -1 = -1$

Je ziet als je een *even* aantal maal $\times -$ uitvoert, dan is het antwoord: $+$. En als je een *oneven* aantal maal $\times -$ uitvoert, dan is het antwoord: $-$. We verwoorden dit in regel 7.7

Regel 7.7	Voor alle $n \in \mathbb{Z}$ geldt:
$(-1)^{2n} = +1$	oftewel: $(-1)^{\text{even}} = +1$
$(-1)^{2n+1} = -1$	oftewel: $(-1)^{\text{oneven}} = -1$

Toelichting:

1. $\mathbb{Z}$ is het symbool, waarmee we de verzameling van de *gehele getallen* aangeven. Dit is de verzameling $\{\dots, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, \dots\}$
2. Spreek $n \in \mathbb{Z}$ uit als: n is element van de gehele getallen. In feite willen we met deze uitdrukking niets anders zeggen dan: n stelt een geheel getal voor, waarvan de grootte op dit moment nog niet bekend is.
3. Een getal is *even* als het deelbaar is door 2. Als je een geheel getal vermenigvuldigt met 2, dan is het antwoord $2n$ vanzelfsprekend deelbaar door 2. Dus $2n$ stelt in het algemeen een even getal voor.
4. Als je bij een even getal 1 optelt, dan krijgen we een *oneven* getal, immers dit is niet deelbaar door 2. Als je bij het even getal $2n$ één optelt, je berekent $2n+1$, dan krijg je een oneven getal. Dus $2n+1$ stelt in het algemeen een oneven getal voor. Om dezelfde reden is: $2n-1$ ook een oneven getal.

Voorbeeld 7.8 Bij de tekenbepaling beschouw je het minteken als $(-1)^{\dots}$

1. $(-3a^2b^4)^5 = (-1)^5 \times 3^5 \times (a^2)^5 \times (b^4)^5 = -1 \times 3^5 \times a^{10} \times b^{20} = -3^5 a^{10} b^{20}$
2. $(-2p^3q^2)^6 = (-1)^6 \times 2^6 \times (p^3)^6 \times (q^2)^6 = +1 \times 2^6 \times p^{18} \times q^{12} = +2^6 p^{18} q^{12}$

Opdracht 7.10 Bereken:

- a. $(-xy^2)^3 \times (-2x^2y)^2 \times (x^2y^2)^3 =$
- b. $(-2a^2)^{2n} \times (-b^2)^{2n-1} =$
- c. $(-a^3b^2)^3 \times (-3ab^2)^2 \times (-2ab)^3 =$
- d. $(-2x^2y)^2 \times (2x^2y^2)^3 \times (-\frac{1}{2}xy^2)^2 =$
- e. $(-m^2n)^2 \times (-3m^2)^3 \times (-n^2)^2 =$
- f. $\frac{-24a^5b}{-6a^3b} =$

Opdracht 7.11 Bereken:

- a. $(-2a^2b^3)^3 : (-2ab^4)^2 =$
- b. $(xy^2z^3)^5 : (-x^2y^4z^6)^2 =$
- c. $(-3a^2b^4)^3 \times (ab^2)^3 : (-3a^3b^6)^3 =$
- d. $\frac{(-2a^2b^3)^2 \times (2a^3b^4)^3}{(-\frac{1}{2}ab^2)^2 \times (-4a^2b)^2 \times (ab^3)^4} =$
- e. $\frac{(-3x^2y)^3 \times (2xy^2)^3 \times (-2x^3y^3)^2}{(-2x^2y^2)^3 \times (3x^2y^2)^3} =$