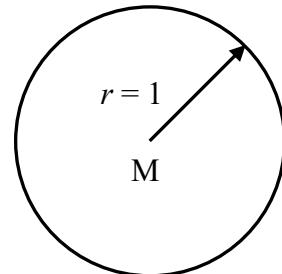


23 Goniometrische verhoudingen in de eenheidscirkel

In hoofdstuk 23 heb je gezien hoe je de sinus, de cosinus en de tangens van een hoek, welke tussen 0° en 90° ligt kunt berekenen. Er bestaan ook grotere hoeken, waarvan je de goniometrische verhoudingen wilt berekenen. Om dit te realiseren heb je de zogenaamde eenheidscirkel nodig.

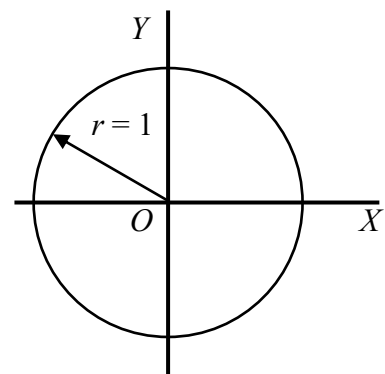


Afspraak 23.1	Een <i>eenheidscirkel</i> is een cirkel, waarvan de straal r één eenheid groot is.
----------------------	--

Toelichting:

Als eenheid kun je elke waarde kiezen, zoals $r = 1$ cm, $r = 3$ cm of zoals in de tekening hiernaast $r = 1,8$ cm. Je noemt deze lengte “jouw nieuwe eenheid” en je geeft hem de waarde: 1.

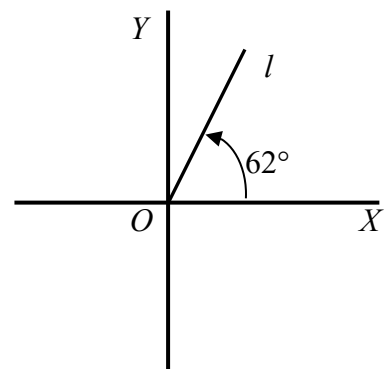
In de goniometrie plaatst men de eenheidscirkel altijd in een vlak, waarin een XY -assenstelsel ligt. Het middelpunt van de cirkel zet men in de oorsprong $O(0, 0)$. (Zie tekening hiernaast)



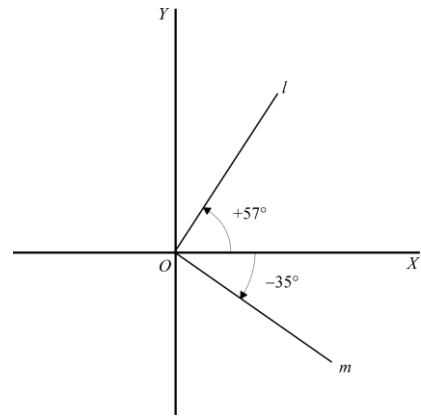
Opdracht 23.1 In welke punten snijdt de cirkel de X -as en de Y -as? Schrijf de coördinaten van deze snijpunten op.

Het tekenen van een hoek in een assenstelsel

Als je een hoek van 62° in een assenstelsel wilt tekenen, dan bedoel je altijd: “de hoek tussen de lijn l en de positieve X -as moet 62° zijn”. (Zie tekening hiernaast)



Je begint dus altijd vanaf de positieve X -as te meten. Hiernaast hebben we een positieve en een negatieve hoek getekend. Als je vanaf de positieve X -as naar het andere been van de hoek een pijl tekent en je maakt een draaibeweging *tegen de wijzers van de klok in*, dan heb je een positieve hoek. Als de draaibeweging met de wijzer van de klok meegaat, dan heb je een negatieve hoek.



Positieve hoek	$\leftrightarrow$	Draaibeweging tegen de wijzer van de klok in
Negatieve hoek	$\leftrightarrow$	Draaibeweging met de wijzers van de klok mee

Opdracht 23.2 Teken in een assenstelsel de volgende hoeken:

- 65°
- -60°
- 130°
- -210°

Als je een hoek van 390° tekent, dan is het eindresultaat hetzelfde als je een hoek van 30° tekent. Na 360° start je weer bij hetzelfde beginpunt.

Opdracht 23.3 Schrijf even grootte hoeken op die tussen 0° en 360° liggen:

- 410°
- -30°
- 850°
- -520°

In de vorige opdracht heb je een aantal maal 360° bij de hoek opgeteld of er van afgetrokken om de gevraagde hoek tussen 0° en 360° te vinden. Wiskundig geef je dit als volgt aan:

Regel 23.1	Voor alle hoeken α geldt: $\alpha \hat{=} \alpha + k \cdot 360^\circ \quad (k \in \mathbb{Z})$
-------------------	--

Toelichting:

- Met de uitdrukking $k \in \mathbb{Z}$ bedoel je, dat je voor k willekeurige gehele getallen mag invullen. $\mathbb{Z} = \{ \dots, -4, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, 4, \dots \}$. Het symbool $\hat{=}$ betekent: “komt overeen met”.
- Zo is 30° dezelfde hoek als: $30^\circ + 1 \cdot 360^\circ = 390^\circ$
of als: $30^\circ + 2 \cdot 360^\circ = 750^\circ$ of als: $30^\circ + -1 \cdot 360^\circ = -330^\circ$
- Met de uitdrukking: $\alpha + k \cdot 360^\circ \quad (k \in \mathbb{Z})$ geef je dus niet één hoek, maar een hele verzameling hoeken aan.
- Omdat je na 360° een herhaling van de hoeken krijgt, zeg je de hoeken hebben een *periode* van 360° . Je kunt $\alpha + k \cdot 360^\circ \quad (k \in \mathbb{Z})$ ook lezen als: “ α plus een aantal (k) maal een periode (360°)”

Voorbeeld 23.1 Als je opschrijft: $1 + k \cdot 3$ ($k \in \mathbb{Z}$), dan bestaat deze verzameling uit onder andere de getallen:

$$1 + -2 \cdot 3 = 1 - 6 = -5$$

$$1 + -1 \cdot 3 = 1 - 3 = -2$$

$$1 + 0 \cdot 3 = 1 + 0 = 1$$

$$1 + 1 \cdot 3 = 1 + 3 = 4$$

$$1 + 2 \cdot 3 = 1 + 6 = 7$$

$$1 + 3 \cdot 3 = 1 + 9 = 10$$

enzovoorts.

Opdracht 23.4 Noem minimaal 5 getallen uit de volgende verzamelingen:

a. $3 + k \cdot 5$ ($k \in \mathbb{Z}$)

b. $-2 + k \cdot 5$ ($k \in \mathbb{Z}$)

c. $-2 + k \cdot 3$ ($k \in \mathbb{Z}$)

d. $2 + k \cdot 3$ ($k \in \mathbb{Z}$)

Opdracht 23.5 Geef met behulp van de notatie $a + k \cdot \text{periode}$ ($k \in \mathbb{Z}$) aan welke verzamelingen hier staan:

a. $\{\dots, -2, 2, 6, 10, 14, \dots\}$

b. $\{\dots, -3, 1, 5, 9, 13, \dots\}$

c. $\{\dots, -3, 2, 7, 12, 17, \dots\}$

In opdracht 23.5 is het wellicht duidelijk geworden, dat je meer dan een antwoord kunt geven om verzamelingen aan te duiden. Zo is: $\{\dots, -1, 2, 5, 8, \dots\}$ te schrijven als:

$-1 + k \cdot 3$ ($k \in \mathbb{Z}$) of: $2 + k \cdot 3$ ($k \in \mathbb{Z}$) of: $5 + k \cdot 3$ ($k \in \mathbb{Z}$) maar **niet** als:

$1 + k \cdot 3$ ($k \in \mathbb{Z}$)

Opdracht 23.6 Noem alle getallen x die liggen tussen de 0 en 20 (wiskundige notatie: $x \in [0, 20]$) van de volgende verzameling: $x = -1 + k \cdot 5$ ($k \in \mathbb{Z}$)

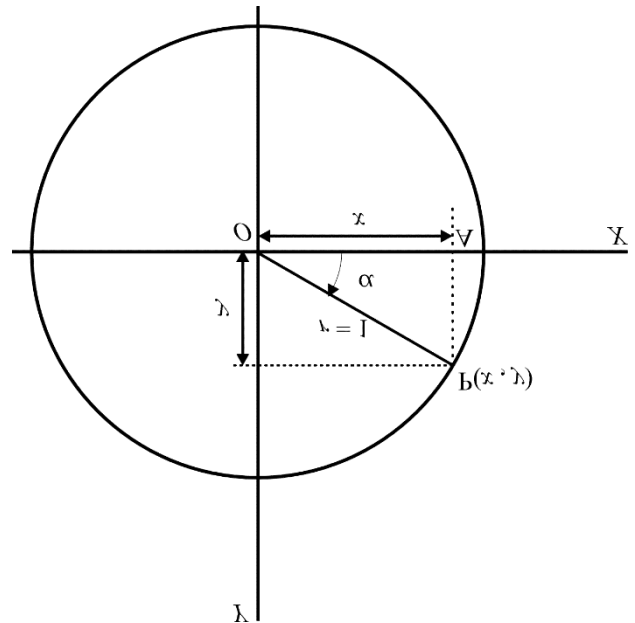
Goniometrie in de eenheidscirkel

Hiernaast is een eenheidscirkel met een onbekende hoek α is getekend. De cirkel wordt gesneden in een punt P met coördinaten (x, y) . Deze coördinaten geven aan hoe je vanuit de oorsprong in het punt P kunt komen en daarom zijn dit ook de lengtes van de zijden van $\triangle OAP$, namelijk $OA = x$ -coördinaat en $AP = y$ -coördinaat. De schuine zijde OP is de straal van de eenheidscirkel en heeft de lengte 1. Om deze reden kun je afleiden dat:

$$\sin \alpha = \frac{AP}{OP} = \frac{y}{1} = y$$

$$\cos \alpha = \frac{OA}{OP} = \frac{x}{1} = x$$

$$\tan \alpha = \frac{AP}{OA} = \frac{y}{x}$$



Dit opmerkelijk resultaat zullen we in de toekomst voor alle hoeken α gaan toepassen.

Afspraak 23.1

Voor **elke** hoek α geldt:

$\sin \alpha = y$ - coördinaat van het snijpunt met de eenheidscirkel

$\cos \alpha = x$ - coördinaat van het snijpunt met de eenheidscirkel

$\tan \alpha = \frac{y\text{-coördinaat van het snijpunt met de eenheidscirkel}}{x\text{-coördinaat van het snijpunt met de eenheidscirkel}}$

Regel 23.2

$$\tan \alpha = \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha}$$

Toelichting:

Dit volgt onmiddellijk uit afspraak 23.1

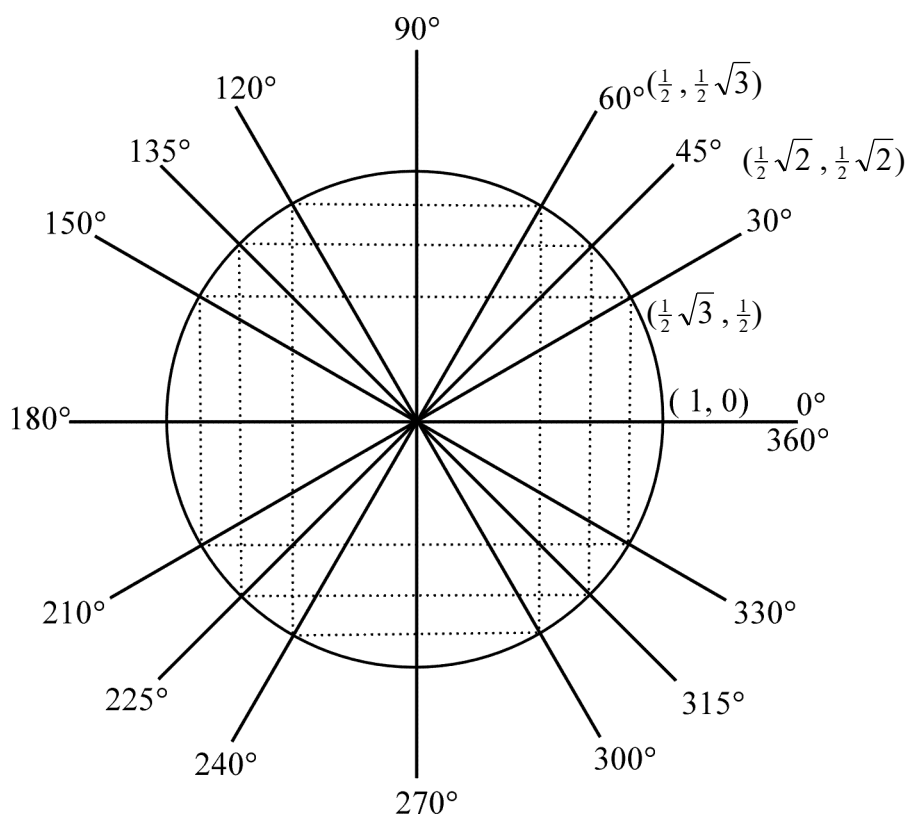
Opdracht 23.7

- Geef in de onderstaande cirkel de coördinaten aan bij de hoeken van: 90° , 180° en 270° .
- Vul tabel 24.1 verder in. Maak gebruik van de eenheidscirkel en afspraak 24.1 (met + en – geef je aan of de sinus/cosinus/tangens positief of negatief is in een kwadrant)

$\alpha (^\circ)$	0°	1 ^e kwadrant $0^\circ < \alpha < 90^\circ$	90°	2 ^e kwadrant $90^\circ < \alpha < 180^\circ$	180°	3 ^e kwadrant $180^\circ < \alpha < 270^\circ$	270°	4 ^e kwadrant $270^\circ < \alpha < 360^\circ$	360°
$\sin \alpha$	0	+	1	+	0	–	–1	–	0
$\cos \alpha$									
$\tan \alpha$									

Tabel 23.1

Als je uitgaat van de twee bijzondere driehoeken met hoek van $30^\circ - 60^\circ - 90^\circ$ en $45^\circ - 45^\circ - 90^\circ$ en hun bijbehorende verhoudingen, dan kun je van een groot aantal hoeken, de sinus, cosinus en de tangens bepalen.



Opdracht 23.8 Geef bij alle hoeken in de hierbovengetekende eenheidscirkel de coördinaten van de snijpunten met de cirkel aan.

Opdracht 23.9

Maak gebruik van de eenheidscirkel uit opdracht 23.4 om tabel 23.2 in te vullen.

(Opmerking: de rij α (rad) wordt later ingevuld.)

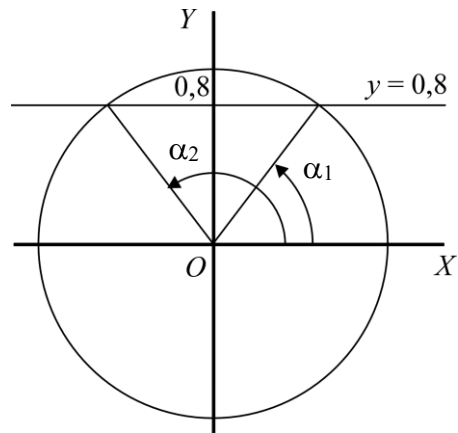
α ($^\circ$)	0°	30°	45°	60°	90°	120°	135°	150°	180°	210°	225°	240°	270°	300°	315°	330°	360°
α (rad)																	
$\sin \alpha$		$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}\sqrt{2}$	$\frac{1}{2}\sqrt{3}$													
$\cos \alpha$		$\frac{1}{2}\sqrt{3}$	$\frac{1}{2}\sqrt{2}$	$\frac{1}{2}$													
$\tan \alpha$		$\frac{1}{3}\sqrt{3}$	1	$\sqrt{3}$													

Tabel 23.2

Zoals in de bovenstaande tabel te zien is komen de goniometrische verhoudingen meer dan eens voor.

Voorbeeld 23.2

We gaan op zoek naar alle hoeken α , waarvoor de sinuswaarde gelijk is aan 0,8. In de wiskunde schrijf je de volgende vergelijking op: $\sin \alpha = 0,8$. Omdat de sinuswaarde wordt aangegeven door de y -coördinaat tekenen we een eenheidscirkel en de lijn $y = 0,8$. Deze lijn snijdt de cirkel in twee punten. Voor de bijbehorende hoeken geldt dat de sinuswaarde (lees: y -coördinaat) gelijk is aan 0,8. Met behulp van de geodriehoek kun je de hoeken opmeten. Als je α_1 hebt opgemeten, dan hoeft je α_2 niet meer apart te meten, want $\alpha_2 = 180^\circ - \alpha_1$.



Je vindt **alle** hoeken van een sinusvergelijking met de algemene oplossingsverzameling:

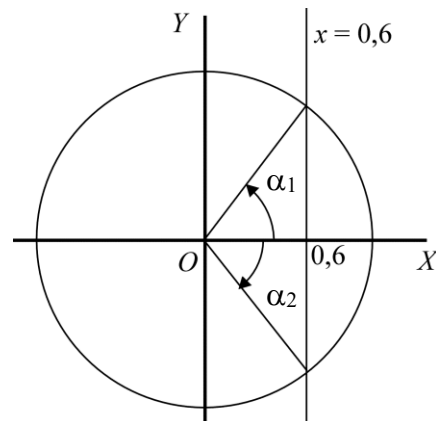
$$\begin{cases} \alpha + k \cdot 360^\circ \\ 180^\circ - \alpha + k \cdot 360^\circ \end{cases} \quad (k \in \mathbb{Z})$$

Opdracht 23.10 Teken alle hoeken waarvoor geldt: (meet de hoeken op met een geodriehoek)

- $\sin \alpha = 0,6$
- $\sin \alpha = -0,3$
- $\sin \alpha = 1,4$

Voorbeeld 23.3

We gaan op zoek naar alle hoeken α , waarvoor de cosinuswaarde gelijk is aan 0,6. In de wiskunde schrijf je de volgende vergelijking op: $\cos \alpha = 0,6$. Omdat de cosinuswaarde wordt aangegeven door de x -coördinaat tekenen we een eenheidscirkel en de lijn $x = 0,6$. Deze snijdt de cirkel in twee punten. Voor de bijbehorende hoeken geldt dat de cosinuswaarde (lees: x -coördinaat) gelijk is aan 0,6. Met behulp van de geodriehoek kun je de hoeken opmeten. Als je α_1 hebt opgemeten, dan hoeft je α_2 niet meer apart te meten, want $\alpha_2 = -\alpha_1$.



Je vindt **alle** hoeken van een cosinusvergelijking met de algemene oplossingsverzameling:

$$\begin{cases} \alpha + k \cdot 360^\circ \\ -\alpha + k \cdot 360^\circ \end{cases} \quad (k \in \mathbb{Z})$$

Opdracht 23.11 Teken alle hoeken waarvoor geldt: (meet de hoeken op met een geodriehoek)

- $\cos \alpha = 0,7$
- $\cos \alpha = -0,2$
- $\cos \alpha = -2$

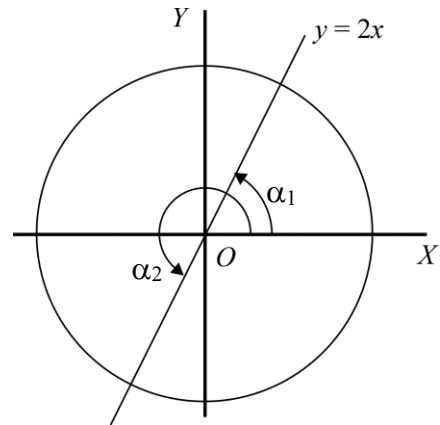
Voorbeeld 23.4

We gaan op zoek naar alle hoeken α , waarvoor de tangenswaarde gelijk is aan 2. In de wiskunde schrijf je de volgende vergelijking op: $\tan \alpha = 2$. Omdat de tangenswaarde wordt aangegeven door de verhouding

$\frac{y}{x}$ tekenen we een eenheidscirkel en de lijn

$\frac{y}{x} = 2 \Rightarrow y = 2x$. Deze snijdt de cirkel in twee punten.

Voor de bijbehorende hoeken geldt dat de tangenswaarde gelijk is aan 2. Met behulp van de geodriehoek kun je de hoeken opmeten. Als je α_1 hebt opgemeten, dan hoeft je α_2 niet meer apart te meten, want $\alpha_2 = 180^\circ + \alpha_1$.



Je vindt **alle** hoeken van een tangensvergelijking met de algemene oplossingsverzameling:

$$\begin{cases} \alpha + k \cdot 360^\circ \\ 180^\circ + \alpha + k \cdot 360^\circ \end{cases} \quad (k \in \mathbb{Z}) \text{ oftewel: } \alpha + k \cdot 180^\circ \quad (k \in \mathbb{Z})$$

Opmerkingen:

1. De vergelijking $\frac{y}{x} = 2$ is niet identiek aan $y = 2x$, want voor $x = 0$ bestaat de eerste vergelijking niet en de tweede vergelijking wel. Voor alle andere x -waarden zijn de vergelijkingen wel identiek.
2. Omdat twee opvolgende hoeken steeds 180° verschillen kun je ook schrijven: $\alpha + k \cdot 180^\circ$ ($k \in \mathbb{Z}$)

Opdracht 23.12 Teken alle hoeken waarvoor geldt: (meet de hoeken op met een geodriehoek)

- a. $\tan \alpha = 3$
- b. $\tan \alpha = -0,5$

De hoekeenheid radialen

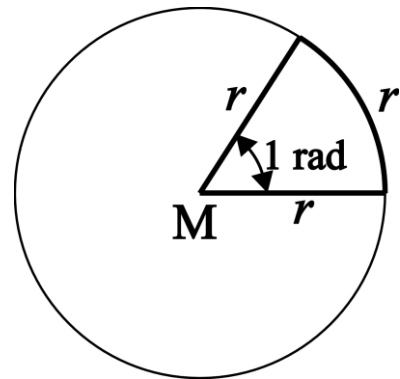
Tot op dit moment ben je gewend om de grootte van hoeken uit te drukken in de eenheid graden ($^{\circ}$). Naast de graad bestaat er nog een andere hoekeenheid, de radiaal. Deze heeft een aantal voordelen ten opzichte van de graad:

1. De radiaal levert de mogelijkheid om een juiste as indeling voor grafieken te maken.
2. De radiaal levert eenvoudigere formules booglengtes en oppervlaktes van cirkeldelen te berekenen.

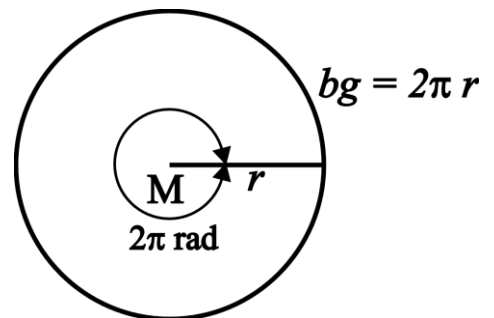
Afspraak 23.2 Een *radiaal* is een middelpuntshoek, waarbij de booglengte even groot is als de straal van de cirkel.

Hiernaast is een hoek van 1 radiaal (afgekort: rad) getekend. Een eerste schatting van de grootte van deze hoek in graden is, dat 1 rad ongeveer 60° is (waarom?). Ook kunnen we zeggen dat hij kleiner dan 60° is. Bij een hoek van 2 radialen hoort een booglengte van $2r$ en een booglengte van $3r$ hoort bij een hoek van 3 rad. Dit brengt ons tot de volgende regel.

Regel 23.2 booglengte = hoek in rad $\times$ straal
In formulevorm:
 $bg = \alpha \text{ (rad)} \times r$



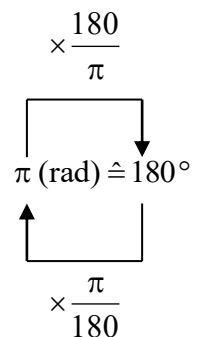
De zojuist beschreven regel stelt je ook in staat om de exacte waarde van 1 radiaal te bepalen, want als je een booglengte neemt die gelijk is aan de omtrek van de cirkel, $bg = 2\pi r$, dan is de bijbehorende hoek gelijk aan 2π radialen. Omdat je weet dat dit ook 360° is geldt dus: $2\pi \text{ (rad)} \triangleq 360^{\circ}$. Je deelt aan beide zijden door 2 en je vindt:



Regel 23.3 $\pi \text{ (rad)} \triangleq 180^{\circ}$

Uit regel 24.3 kun je eenvoudig de omrekeningsfactoren afleiden om van graden naar radialen om te rekenen en omgekeerd. Als je van graden naar radialen omrekent, dan vermenigvuldig je met een factor die het getal 180 wijzigt in π (dit is de factor: $\frac{\pi}{180}$) en van radialen naar graden gebruik je een

factor die van π weer 180 maakt (dit is de factor: $\frac{180}{\pi}$).



Voorbeeld 23.5

1. $1 \text{ (rad)} \triangleq 1 \times \frac{180}{\pi} = 57,29577951...^{\circ}$
2. $1^{\circ} \triangleq 1 \times \frac{\pi}{180} = 0,0174532925... \text{ (rad)}$

Opdracht 23.13 Reken om:

- a. $0,7 \text{ rad} \hat{=} \dots^\circ$
- b. $2,1 \text{ rad} \hat{=} \dots^\circ$
- c. $159^\circ \hat{=} \dots \text{ rad}$
- d. $74^\circ \hat{=} \dots \text{ rad}$

Het nadeel van radialen is, dat in de beginfase getallen verschijnen, welke je niets zeggen over de grootte van de hoek. Bij de graden is dit niet het geval. Om de herkenbaarheid van hoeken in radialen te verhogen ga je als volgt te werk. (Je vermenigvuldigt π dus niet uit)

Voorbeeld 23.6

1. $90^\circ \hat{=} 90 \times \frac{\pi}{180} = \frac{90}{180} \times \pi = \frac{1}{2} \pi \text{ rad}$
2. $120^\circ \hat{=} 120 \times \frac{\pi}{180} = \frac{120}{180} \times \pi = \frac{2}{3} \pi \text{ rad}$
3. $\frac{1}{4} \pi \text{ rad} \hat{=} \frac{1}{4} \pi \times \frac{180}{\pi} = \frac{\pi \times 180}{4 \times \pi} = \frac{180}{4} = 45^\circ$
4. $1\frac{1}{6} \pi \text{ rad} \hat{=} \frac{7}{6} \pi \times \frac{180}{\pi} = \frac{7\pi \times 180}{6 \times \pi} = 210^\circ$

Opdracht 23.14 Reken om:

- a. $60^\circ \hat{=} \dots \pi \text{ rad}$
- b. $150^\circ \hat{=} \dots \pi \text{ rad}$
- c. $\frac{2}{3} \pi \text{ rad} \hat{=} \dots^\circ$
- d. $1\frac{3}{4} \pi \text{ rad} \hat{=} \dots^\circ$

Opdracht 23.15 Vul in tabel 23.2 de rij waar de hoeken in radialen staan verder in. Maak gebruik van $\dots \pi \text{ rad}$ notatie.

Om radialen in gewone decimale notatie om te rekenen naar $\dots\pi$ rad notatie kun je gebruik maken van de volgende regel:

Regel 23.4 $\alpha \text{ rad} = \frac{\alpha\pi}{\pi} = \frac{\alpha}{\pi} \times \pi = \beta \times \pi \text{ rad}$

Voorbeeld 23.7

$$1,89 \text{ rad} = \frac{1,89}{\pi} \times \pi \text{ rad} = 0,602\pi \text{ rad}$$

Je ziet dat deze hoek iets groter dan $\frac{1}{2}\pi \text{ rad} \hat{=} 90^\circ$ is.

Opdracht 23.16 Reken om:

- a. $2,34 \text{ rad} = \dots\pi \text{ rad}$
- b. $1,08 \text{ rad} = \dots\pi \text{ rad}$
- c. $0,234\pi \text{ rad} = \dots \text{ rad}$
- d. $1,85\pi \text{ rad} = \dots \text{ rad}$

Opdracht 23.17 De straal van het wiel van een fiets is 40 cm. Welke hoek in radialen heb je afgelegd als je de fiets:

- a. 40 cm vooruit duwt?
- b. 2 m vooruit duwt?
- c. 1,5 km hebt gereden?
- d. Vergelijk de antwoorden met behulp van regel 24.2

Opdracht 23.18

- a. Wat is de afgelegde hoek in radialen als een fietswiel 1 omwenteling maakt?
- b. Hoeveel omwentelingen zijn er gemaakt bij een afgelegde hoek van 500 radialen.