

22 Goniometrie in rechthoekige driehoeken

☞ Een *driehoek* is een figuur, welke je krijgt als je drie punten die niet op één rechte lijn liggen met elkaar verbindt.

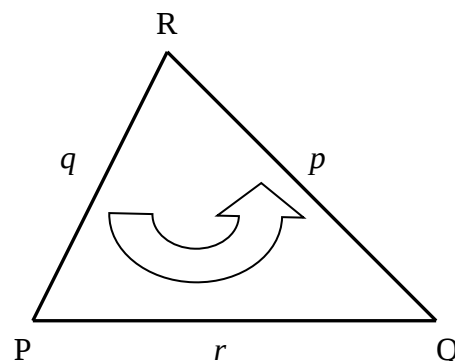
Hiernaast hebben we een driehoek getekend door de punten P, Q en R met elkaar te verbinden. We noemen deze driehoek PQR (notatie: $\triangle PQR$). De punten P, Q en R heten de hoekpunten van de driehoek. Hoekpunten worden **altijd in hoofdletters** geschreven.

We geven een driehoek een naam door de hoekpunten *tegen de wijzers van de klok in* op te noemen. Dit wil zeggen: in plaats van $\triangle PQR$, mag je ook zeggen: $\triangle QRP$ of $\triangle RPQ$, maar niet: $\triangle PRQ$.

De *zijden* van $\triangle PQR$ heten: PQ of r , QR of p , PR of q .

Je benoemt een zijde door de twee hoekpunten van de zijde op te schrijven of je gebruikt de naam van **het hoekpunt in kleine letters** van de hoek die tegenover de zijde ligt. Deze letters worden ook gebruikt om de lengtes van de zijden in formules aan te geven.

We noemen de zijde PQ de *basis* en de zijden PR en QR de *opstaande zijden*. De hoeken P en Q (notatie: $\angle P$ en $\angle Q$) noemen we *basishoeken* en $\angle R$ heet de *tophoek*.

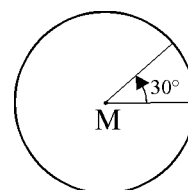


Bij driehoeken wordt gewerkt met *de lengtes van de zijden*, deze zijn in de meetkunde meestal zonder lengte eenheid en met *de grootte van de hoeken*, met de eenheid graden (symbool: $^\circ$). We gaan de hoekmeting nader bekijken.

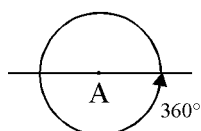
Afspraak 22.1 1° is een hoek die je krijgt, wanneer je de omtrek van een cirkel in 360 gelijke stukjes verdeelt en het middelpunt verbindt met de uiteinden van zo'n stukje.

Toelichting:

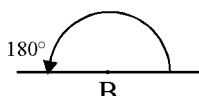
Hiernaast is een hoek getekend, waarbij het middelpunt M verbonden is met het uiteinde van 30 van deze stukjes. Op deze manier vind je een hoek van 30° .



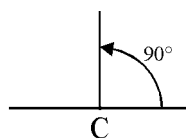
Zo kun je de volgende hoeken maken:



Een volle hoek



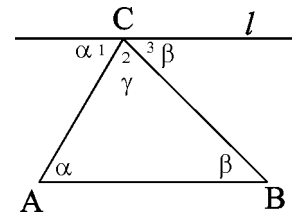
Een gestrekte hoek



Een rechte hoek

Eigenschap 22.1 De som van de hoeken in een driehoek is 180° .**Toelichting:**

In $\triangle ABC$ tekenen we een lijn l door het punt C evenwijdig aan de zijde AB (zie de hiernaast staande tekening).

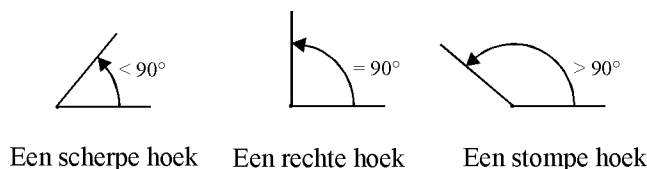


1. Bijzonderheden in meetkundige figuren noem je: “eigenschappen”.
Bijzonderheden bij getallen noem je: “(reken)regels”.
2. Omdat de notatie $\angle C$ niet precies aangeeft welke hoek je bedoelt maak je gebruik van indexen. Je noemt de hoeken bij punt C : $\angle C_1$, $\angle C_2$ en $\angle C_3$.
3. In $\triangle ABC$ hebben we de hoeken: $\angle A$, $\angle B$ en $\angle C_2$. We benoemen deze hoeken ook vaak met de Griekse kleine letters: α (alfa), β (bèta) en γ (gamma).
4. $\angle A = \angle C_1 = \alpha$, dit zijn Z-hoeken. Verder: $\angle B = \angle C_3 = \beta$ (Z-hoeken). Om deze reden geldt voor de som van de hoeken van $\triangle ABC$:

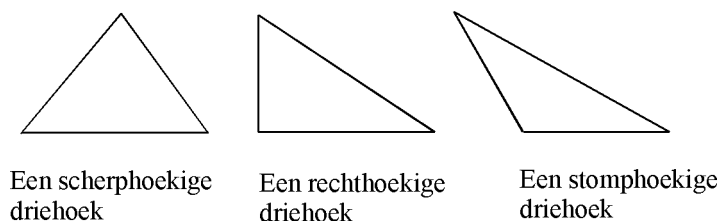
$$\angle A + \angle B + \angle C_2 = \angle C_1 + \angle C_3 + \angle C_2 = \alpha + \beta + \gamma = 180^\circ$$
omdat $\angle C_{1+2+3}$ een gestrekte hoek en daarom gelijk aan 180° is.

Soorten hoeken en driehoeken

Als je alleen kijkt naar hoeken tussen 0° en 180° , dan kun je de hoeken onderverdelen in de volgende soorten:

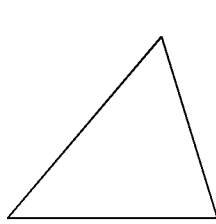


Afhankelijk van de hoeken, welke een driehoek bezit noem je deze:

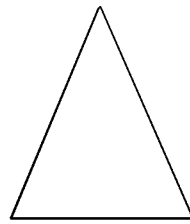


1. Een *scherphoekige* driehoek. Elke hoek is scherp ($< 90^\circ$)
2. Een *rechthoekige* driehoek. Een hoek is recht ($= 90^\circ$) en twee hoeken zijn scherp ($< 90^\circ$)
3. Een *stomphoekige* driehoek. Een hoek is stomp ($> 90^\circ$) en twee hoeken zijn scherp ($< 90^\circ$)

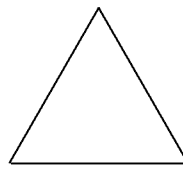
Je kunt de driehoeken ook onderverdelen als je kijkt naar de zijden:



Een willekeurige
driehoek



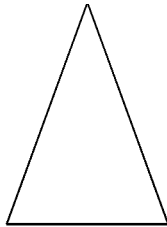
Een gelijkbenige
driehoek



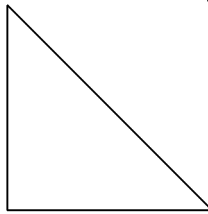
Een gelijkzijdige
driehoek

1. Een *willekeurige* driehoek. Alle zijden zijn verschillend van lengte.
2. Een *gelijkbenige* driehoek. Twee zijden zijn gelijk van lengte en de derde heeft een afwijkende lengte.
3. Een *gelijkzijdige* driehoeken. Alle drie de zijden hebben dezelfde lengte.

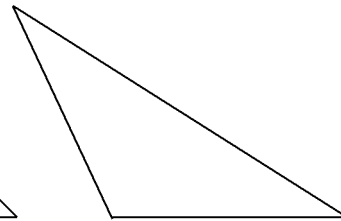
Bij gelijkbenige driehoeken kom je de volgende soorten tegen:



Een gelijkbenige
scherphoekige driehoek



Een gelijkbenige
rechthoekige driehoek



Een gelijkbenige
stomphoekige driehoek

1. Gelijkbenige scherphoekige driehoeken.
2. Gelijkbenige rechthoekige driehoeken.
3. Gelijkbenige stomphoekige driehoeken.

Voor de bijzondere driehoeken gelden een aantal eigenschappen, welke je ten alle tijden mag gebruiken.

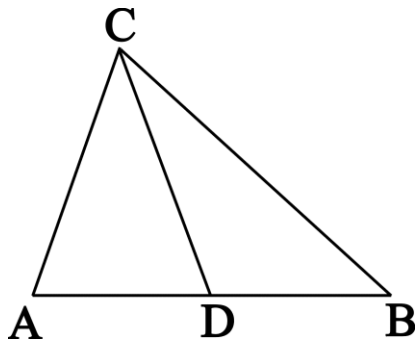
Eigenschap 22.2	In een gelijkbenige driehoek zijn de basishoeken gelijk.
------------------------	--

Eigenschap 22.3	In een gelijkzijdige driehoek zijn alle hoeken 60° .
------------------------	---

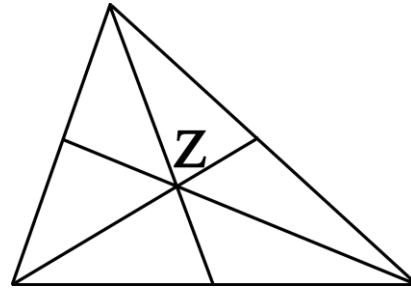
Bijzondere lijnen in driehoeken

Afspraak 22.2 Een **zwaartelij**n is een lijn, die een hoekpunt verbindt met *het midden van de overstaande zijde*.

Eigenschap 22.4 De drie zwaartelijnen van een driehoek gaan door één punt, dit is het **zwaartepunt** Z van de driehoek. Het zwaartepunt is het punt waar de zwaartekracht aangrijpt.

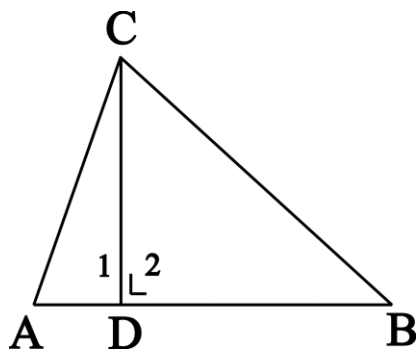


D is het midden van zijde AB .
 $AD = DB$ en daarom is CD een zwaartelij.

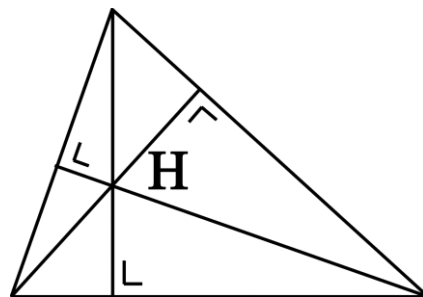


Afspraak 22.3 Een **hoogtelij**n is een lijn, die uit een hoekpunt *loodrecht wordt neergelaten op de overstaande zijde*. Loodrecht wil zeggen onder een hoek van 90° .

Eigenschap 22.5 De drie hoogtelijnen van een driehoek gaan door één punt, dit is het **hoogtepunt** H van de driehoek.

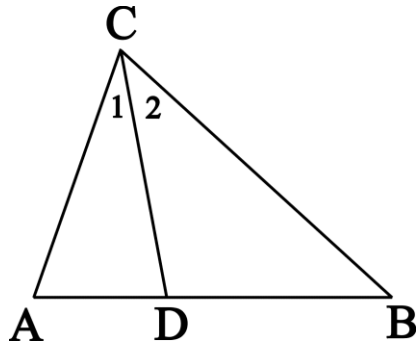


$\angle D_1 = \angle D_2 = 90^\circ$ en daarom is CD een hoogtelij.

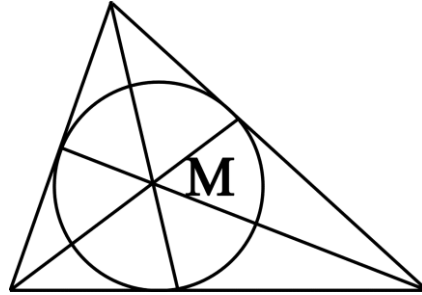


Afspraak 22.4 Een **bissectrice** of **deellijn** is een lijn, die *een hoek middendoor deelt*.

Eigenschap 22.6 De drie bissectrices van een driehoek gaan door één punt, dit is het middelpunt M van de *ingeschreven* cirkel van de driehoek. Je vindt de straal van de cirkel door uit het punt M een *loodlijn* neer te laten op een van de zijden van de driehoek.

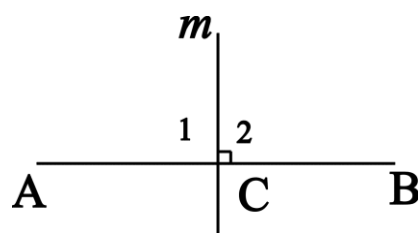


$\angle C_1 = \angle C_2$ en daarom is CD een bissectrice of deellijn.

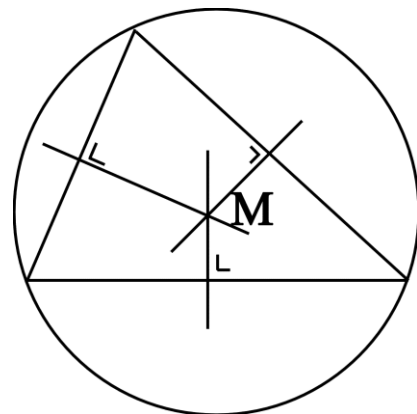


Afspraak 22.5 Een **middelloodlijn** of **as** is een lijn, die *een lijnstuk loodrecht middendoor deelt*.

Eigenschap 22.7 De drie middelloodlijnen van een driehoek gaan door één punt, dit is het middelpunt M van de *omgeschreven* cirkel van de driehoek. Je vindt de straal van de cirkel door het punt M te verbinden met een hoekpunt van de driehoek.



$\angle C_1 = \angle C_2 = 90^\circ$ en $AC = BC$. Daarom is m een middelloodlijn.



Opdracht 22.1 Ga na of het volgende waar is in een willekeurige $\triangle ABC$ (maak een tekening!):

- De zwaartelijns AE en de middelloodlijn van BC hebben punt E gemeenschappelijk.
- De bissectrice CD en de middelloodlijn van AB hebben punt D gemeenschappelijk.

Opdracht 22.2 Gegeven is de gelijkzijdige $\triangle ABC$, met $AB = 5$. Teken in deze driehoek:

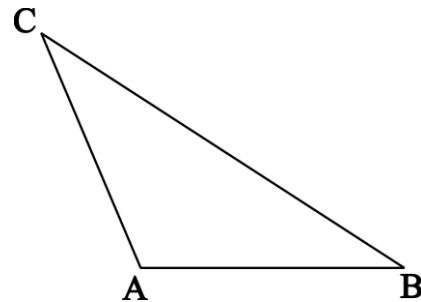
- Het zwaartepunt Z
- De ingeschreven cirkel
- De omgeschreven cirkel
- Wat valt je bij a, b en c op?

Opdracht 22.3 Teken een willekeurige $\triangle ABC$. Teken in deze driehoek:

- Het hoogtepunt H
- Het zwaartepunt Z
- Het middelpunt M van de omgeschreven cirkel
- Ga na dat H, Z en M op een rechte lijn liggen, door deze lijn in $\triangle ABC$ te tekenen. (Deze lijn noemt men: “*de rechte van Euler*”)

Opdracht 22.4 De nevenstaande plaat wil je in twee gelijke oppervlaktes verdelen.

- Langs welke lijn moet je knippen en waarom? (Kies uit de antwoorden: bissectrice, hoogtelijn, zwaartelijns of middelloodlijn)
- Hoeveel mogelijkheden heb je om de plaat door te knippen?



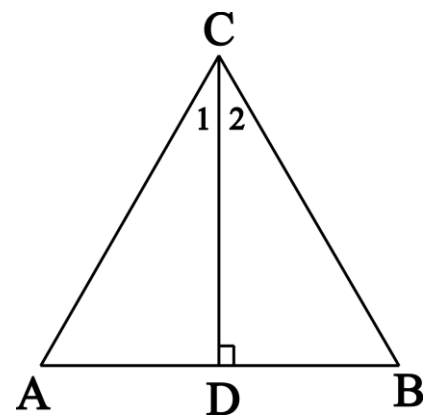
Eigenschap 22.8 In een gelijkbenige driehoek deelt de loodlijn uit de top de basis middendoor, tevens deelt hij de tophoek in twee gelijke delen.

Toelichting:

In $\triangle ABC$ is $AC = BC$, daarom is deze driehoek gelijkbenig. De hoogtelijn CD verdeelt AB in twee gelijke delen: $AD = DB$ en hij deelt $\angle C$ in twee gelijke hoeken:

$\angle C_1 = \angle C_2$. Je kunt dus zeggen:

“De hoogtelijn CD is tevens: zwaartelijns, bissectrice en middelloodlijn”.



De stelling van Pythagoras

Deze stelling of eigenschap werd al gebruikt door de Egyptenaren en de Babyloniërs (ongeveer 2000 jaar voor Christus). Deze bewezen de stelling echter niet. Het is hoogst waarschijnlijk dat een van de leerlingen uit de school van Pythagoras (ongeveer 540 jaar voor Christus) deze stelling heeft bewezen en niet Pythagoras zelf. Ter ere van zijn grote meester gaf hij hem de naam: “De stelling van Pythagoras”.



De stelling van Pythagoras

In een rechthoekige driehoek geldt: “De som van de kwadraten van de rechthoekszijden is gelijk aan het kwadraat van de schuine zijde”.

Toelichting:

De zijden b en c heten *rechthoekszijden*, omdat ze aan een rechte hoek liggen. De zijde a die tegenover de rechte hoek ligt heet *de schuine zijde*.

Voor de tekening hiernaast kunnen we deze stelling in een formule opschrijven:

$$a^2 = b^2 + c^2$$

Bewijs van de stelling van Pythagoras:

De waarheid van de stelling van Pythagoras kan op veel manieren worden aangetoond. Een van de mogelijke bewijzen bekijken we hier.

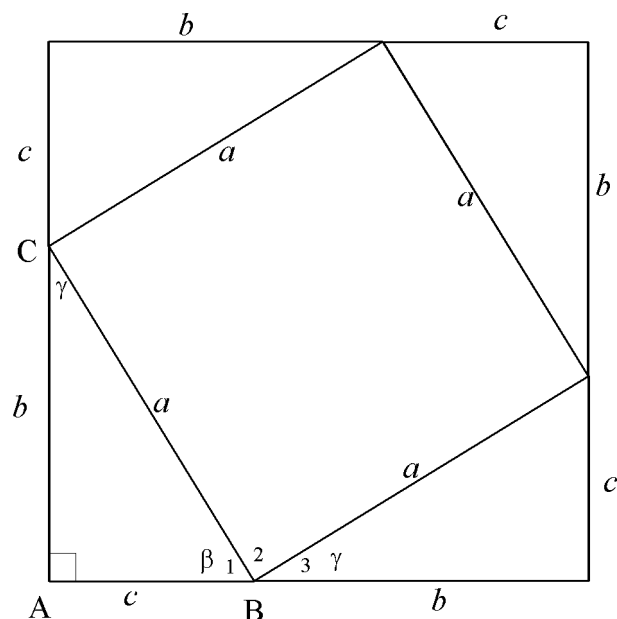
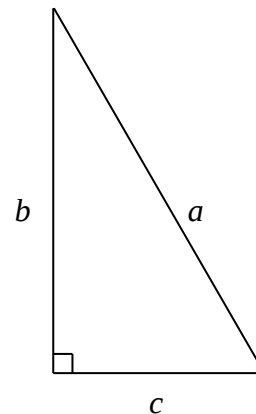
Op het verlengde van zijde AB plaatsen we opnieuw $\triangle ABC$, welke we 90° hebben gedraaid. ($\angle B_3 = \angle C = \gamma$) Op soortgelijke wijze maken we het nevenstaande figuur. Omdat we steeds op het verlengde van een zijde de rechthoekige driehoeken hebben gezet krijgen we een groot vierkant met als zijde: $b + c$. Het oppervlak van dit vierkant is gelijk aan: $(b + c)^2$.

$\angle B_{1+2+3} = 180^\circ$, want AB en zijn verlengde is een rechte lijn. Uit $\triangle ABC$ volgt dat:

$\beta + \gamma = 90^\circ$ en daarom is: $\angle B_2 = 180^\circ - (\angle B_1 + \angle B_3) = 180^\circ - (\beta + \gamma) = 180^\circ - 90^\circ = 90^\circ$. Op deze wijze kun je laten zien dat de vierhoek, waarvan elke zijde gelijk aan a is in feite een vierkant is.

Het oppervlak van het grote vierkant is ook gelijk aan: $4 \times \text{oppervlak van } \triangle ABC + \text{het oppervlak van het vierkant met zijde } a$. Hiermee krijgen we de volgende vergelijking:

$4 \times \frac{1}{2}bc + a^2 = (b + c)^2 \Leftrightarrow 2bc + a^2 = b^2 + 2bc + c^2 \Leftrightarrow a^2 = b^2 + c^2$, waarmee we de stelling van Pythagoras hebben aangetoond. (zie ook regel 11.1)



☞ Als je een meetkundige opdracht maakt, dan teken je eerst een schets van het gegeven figuur en je zet hierin alle gegevens op de juiste plaats.

Voorbeeld 22.1

Gegeven is $\triangle ABC$ met $\angle B = 90^\circ$.

Zijde $a = 9$ en $c = 12$. Bereken zijde b .

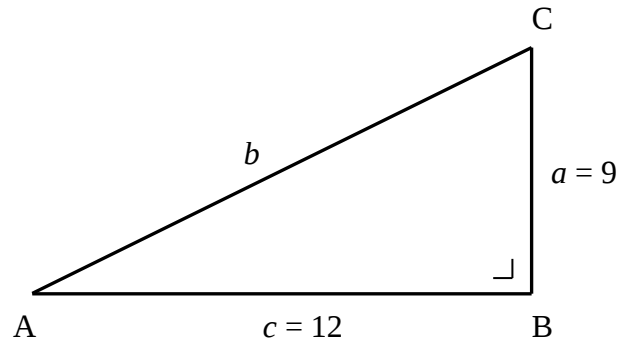
We maken eerst een schets, zoals hiernaast (dit hoeft niet per se op schaal!)

Omdat zijde b de schuine zijde van $\triangle ABC$ is, is de stelling van Pythagoras voor deze driehoek:

$b^2 = a^2 + c^2$. We vullen de gegevens in de formule in en we vinden:

$$b^2 = 9^2 + 12^2 = 81 + 144 = 225 \Rightarrow b = \sqrt{225} = 15$$

(De oplossing $b = -15$ is onzinnig omdat lengtes altijd positief zijn).

**Voorbeeld 22.2**

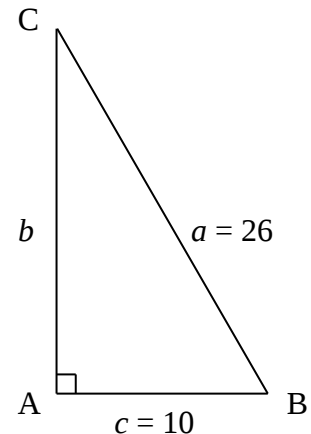
Gegeven is $\triangle ABC$ met $\angle A = 90^\circ$. Zijde $a = 26$ en $c = 10$.

Bereken zijde b .

We maken eerst een schets, zoals hiernaast.

Omdat zijde a de schuine zijde van $\triangle ABC$ is, is de stelling van Pythagoras voor deze driehoek: $a^2 = b^2 + c^2$. We vullen de gegevens in de formule in en we vinden:

$$26^2 = b^2 + 10^2 \Leftrightarrow 676 = b^2 + 100 \Leftrightarrow b^2 = 576 \Rightarrow b = \sqrt{576} = 24.$$



Opdracht 22.5 Van $\triangle ABC$ met $\angle C = 90^\circ$ zijn twee zijden gegeven. Bereken de derde zijde:

- $a = 4$ en $b = 3$
- $a = 5$ en $b = 12$
- $a = 6$ en $b = 8$
- $a = 4$ en $b = 7$

Opdracht 22.6 Van $\triangle ABC$ met $\angle B = 90^\circ$ zijn twee zijden gegeven. Bereken de derde zijde:

- $a = \frac{1}{2}$ en $c = \frac{1}{3}$
- $a = \frac{4}{5}$ en $c = \frac{3}{5}$
- $a = 3$ en $c = 6$
- $a = 1\frac{1}{2}$ en $c = 3$

Opdracht 22.7 Van $\triangle ABC$ met $\angle A = 90^\circ$ zijn twee zijden gegeven. Bereken de derde zijde:

- $a = 10$ en $b = 8$
- $a = 2\frac{1}{2}$ en $b = 1\frac{1}{2}$
- $b = 7$ en $a = 25$
- $a = 0,5$ en $c = 0,4$

Ook bij het bepalen van de afstand tussen twee punten in een XY-assenstelsel maken we vaak gebruik van de stelling van Pythagoras.

Regel 22.1 De afstand tussen de punten $A(x_1, y_1)$ en $B(x_2, y_2)$ is:

$$\sqrt{(\Delta x)^2 + (\Delta y)^2} = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$$

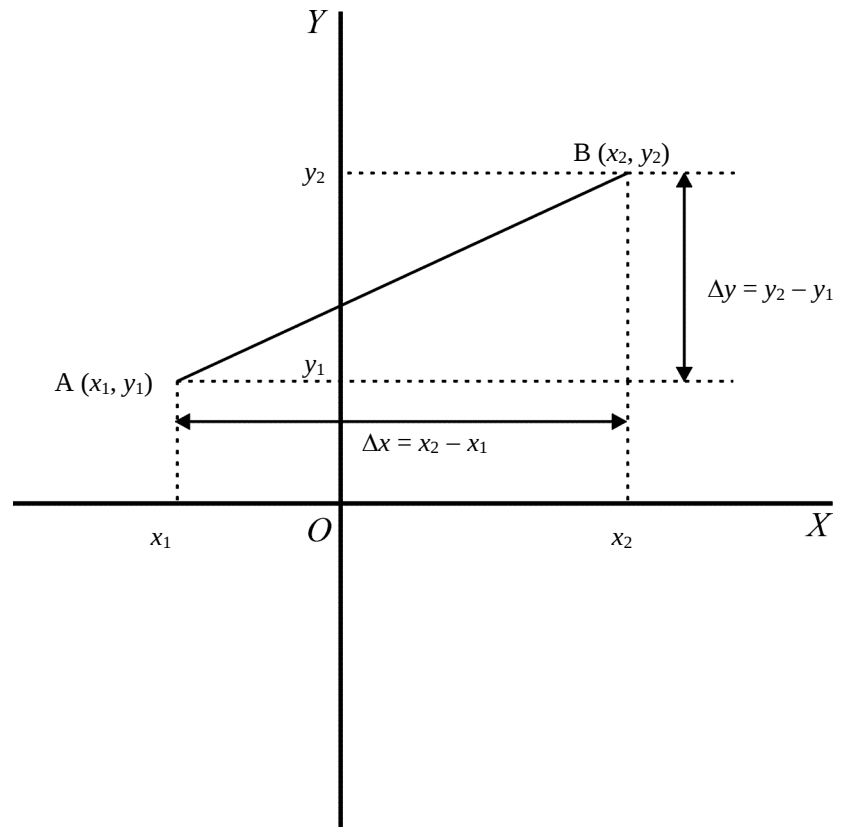
Toelichting:

Als de punten A en B niet op een horizontale of verticale lijn liggen, dan kun je een rechthoekige driehoek maken, waarbij de lengten van de rechthoekszijden gelijk zijn aan: Δx en Δy .

Door de stelling van Pythagoras toe te passen vind je de schuine zijde, welke de afstand tussen de punten A en B is.

Als de punten A en B op een horizontale lijn liggen dan is de afstand gelijk aan: Δx .

Als de punten op een verticale lijn liggen dan is de afstand gelijk aan: Δy .



Opdracht 22.8 in een rechthoekig assenstelsel zijn twee punten gegeven. Bereken de afstand tussen deze punten.

- (1, 6) en (1, 15)
- (3, -7) en (3, -4)
- (3, -7) en (10, -7)
- (1, 1) en (1, 25)
- (1, 4) en (4, 8)
- (1, 4) en (-4, 8)
- (1, 4) en (-4, -8)
- (-1, 4) en (4, 8)
- (10, -8) en (4, 0)
- (11, 1) en (1, 11)
- (8, 18) en (-4, 13)
- $(3\frac{1}{2}, -4)$ en $(2\frac{1}{2}, -1)$

In veel opdrachten wordt gebruik gemaakt van de zogenaamde *Pythagorese getallen*, dit zijn gehele getallen welke voldoen aan de stelling van Pythagoras. Een aantal voorbeelden van dit soort getallen zijn:

1. $3 - 4 - 5$ want: $3^2 + 4^2 = 5^2 \Leftrightarrow 9 + 16 = 25$
2. $5 - 12 - 13$ want: $5^2 + 12^2 = 13^2 \Leftrightarrow 25 + 144 = 169$
3. $7 - 24 - 25$ want: $7^2 + 24^2 = 25^2 \Leftrightarrow 49 + 576 = 625$

Niet alleen de bovengenoemde getallen voldoen aan de stelling van Pythagoras, waar ook alle veelvouden van deze getallen.

Dit wil zeggen: behalve $3 - 4 - 5$ zijn ook $6 - 8 - 10$ en $9 - 12 - 15$ Pythagorese getallen.

Verhoudingen

Het bovenstaande kan worden omschreven met behulp van regel 23.2

Regel 22.2 Voor alle veeltermen a, b, c en k ($k \neq 0$) geldt:
 $a : b : c = ka : kb : kc$

Toelichting:

$a : b : c$ spreek je als volgt uit: “ a staat tot b staat tot c ”

Opdracht 22.9 Vul de ontbrekende getallen in:

- a. $3 : 4 : 5 = \dots : 16 : \dots = 30 : \dots : \dots = \dots : \dots : 1$
- b. $5 : 12 : 13 = \dots : 24 : \dots = 1 : \dots : \dots = \dots : \dots : 1$

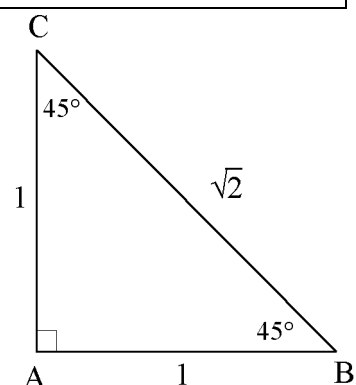
Bijzondere driehoeken

Eigenschap 22.9 In een driehoek met hoeken van $45^\circ - 45^\circ - 90^\circ$ verhouden de zijden zich als $1 : 1 : \sqrt{2}$

Toelichting:

$\triangle ABC$ is een rechthoekige driehoek omdat $\angle A = 90^\circ$. Omdat de hoeken B en C gelijk zijn aan 45° is de driehoek ook gelijkbenig. Als de zijde $AB = 1$, dan is ook de zijde $AC = 1$ en volgens de stelling van Pythagoras is:

$BC = \sqrt{AB^2 + AC^2} = \sqrt{1^2 + 1^2} = \sqrt{1+1} = \sqrt{2}$. Daarom geldt de volgende verhouding tussen de zijden $AB : AC : BC = 1 : 1 : \sqrt{2}$



Voorbeeld 22.3

In $\triangle ABC$ is $\angle A = 90^\circ$, $\angle B = 45^\circ$ en $BC = 12$. Bereken de overige zijden.

Omdat uit de gegevens volgt dat $\angle C = 45^\circ$ geldt eigenschap 23.9 en op grond van deze eigenschap kunnen we schrijven: $AB : AC : BC = 1 : 1 : \sqrt{2}$. BC is $\sqrt{2}$ maal zo groot als AB ,

$$\text{dus } BC = AB \times \sqrt{2} \Leftrightarrow AB = \frac{BC}{\sqrt{2}} = \frac{12}{\sqrt{2}} = \frac{12}{\sqrt{2}} \times \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}} = \frac{12\sqrt{2}}{2} = 6\sqrt{2}.$$

AC is even groot als AB , dus $AC = 6\sqrt{2}$

Opdracht 22.10 Van een rechthoekige driehoek met een hoek van 45° wordt gevraagd: de niet gegeven zijden te berekenen als:

- De rechthoekszijde 9 is.
- De schuine zijde 24 is.

Eigenschap 22.10 In een driehoek met hoeken van $30^\circ - 60^\circ - 90^\circ$ verhouden de zijden zich als $2 : 1 : \sqrt{3}$

Toelichting:

$\triangle ABC$ is een gelijkzijdige driehoek, daarom geldt:

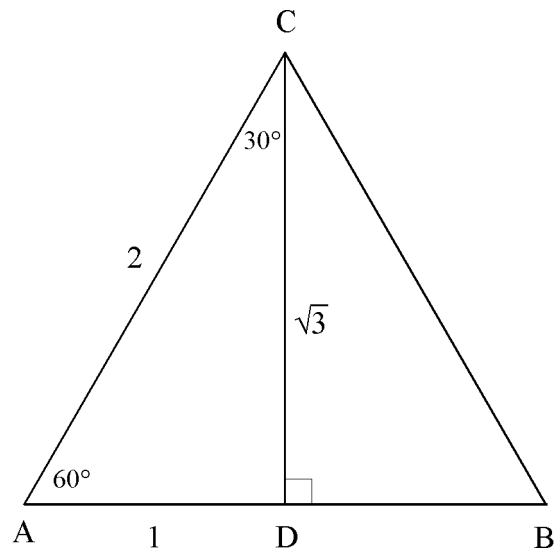
$$\angle A = \angle B = \angle C = 60^\circ \text{ (eigenschap 23.3).}$$

Als zijde $AB = 2$, dan heeft elke zijde van deze driehoek lengte 2. Vanuit de tophoek C wordt de loodlijn CD neergelaten. Op grond van eigenschap 23.8 deelt de lijn CD de basis AB middendoor, hierdoor is $AD = DB = 1$. Verder wordt op basis van dezelfde eigenschap $\angle C$ verdeeld in twee gelijke hoeken van 30° .

Om deze reden is $\triangle ADC$ een rechthoekige driehoek met hoeken van: $30^\circ - 60^\circ - 90^\circ$. In deze driehoek geldt: $AC = 2$, $AD = 1$ en als je de stelling van Pythagoras toepast vind je:

$$CD = \sqrt{AC^2 - AD^2} = \sqrt{2^2 - 1^2} = \sqrt{4 - 1} = \sqrt{3}.$$

Daarom geldt de volgende verhouding tussen de zijden $AC : AD : CD = 2 : 1 : \sqrt{3}$



Voorbeeld 22.4

In $\triangle ABC$ is $\angle A = 90^\circ$, $\angle B = 60^\circ$ en $AC = 12$. Bereken de overige zijden.

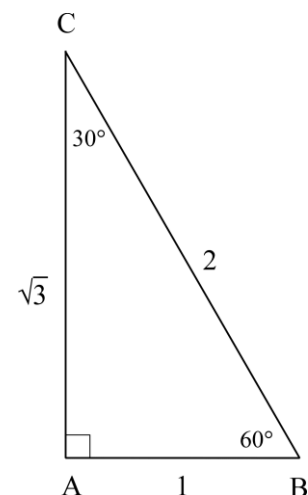
Omdat uit de gegevens volgt dat $\angle C = 30^\circ$ geldt eigenschap 23.10 en op grond van deze eigenschap kunnen we schrijven:

$$BC : AB : AC = 2 : 1 : \sqrt{3}$$

AC is $\sqrt{3}$ maal zo groot als AB , dus:

$$AC = AB \times \sqrt{3} \Leftrightarrow AB = \frac{AC}{\sqrt{3}} = \frac{12}{\sqrt{3}} = \frac{12}{\sqrt{3}} \times \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{3}} = \frac{12\sqrt{3}}{3} = 4\sqrt{3}.$$

BC is 2 maal zo groot als AB , dus $BC = 2 \times AB = 2 \times 4\sqrt{3} = 8\sqrt{3}$



Opdracht 22.11 Van een rechthoekige driehoek met een hoek van 30° wordt gevraagd: de niet gegeven zijden te berekenen als:

- De schuine zijde 48 is.
- De kleinste rechthoekszijde 9 is.
- De grootste rechthoekszijde 15 is.

Goniometrische verhoudingen

Niet alleen voor deze bijzondere rechthoekige driehoeken gelden er vaste verhoudingen tussen de lengtes van hun zijden. Dit geldt voor elke rechthoekige driehoek. Het enige verschil met de bijzondere rechthoekige driehoeken is dat de verhoudingsgetallen niet zo'n mooie eenvoudige getallen zijn.

We maken gebruik van de volgende begrippen:

In de hiernaast staande rechthoekige $\triangle ABC$ is $\angle C = 90^\circ$.

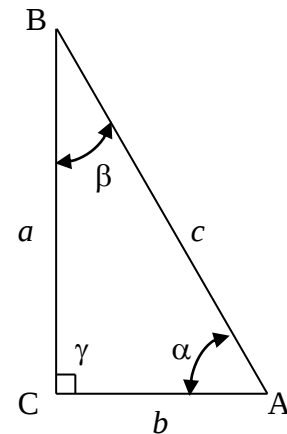
Een zijde die aan een rechte hoek ligt heet een *rechthoekszijde*.

Elke rechthoekige driehoek heeft twee rechthoekszijden.

AC of b noemen we *de aanliggende rechthoekszijde* van hoek A.

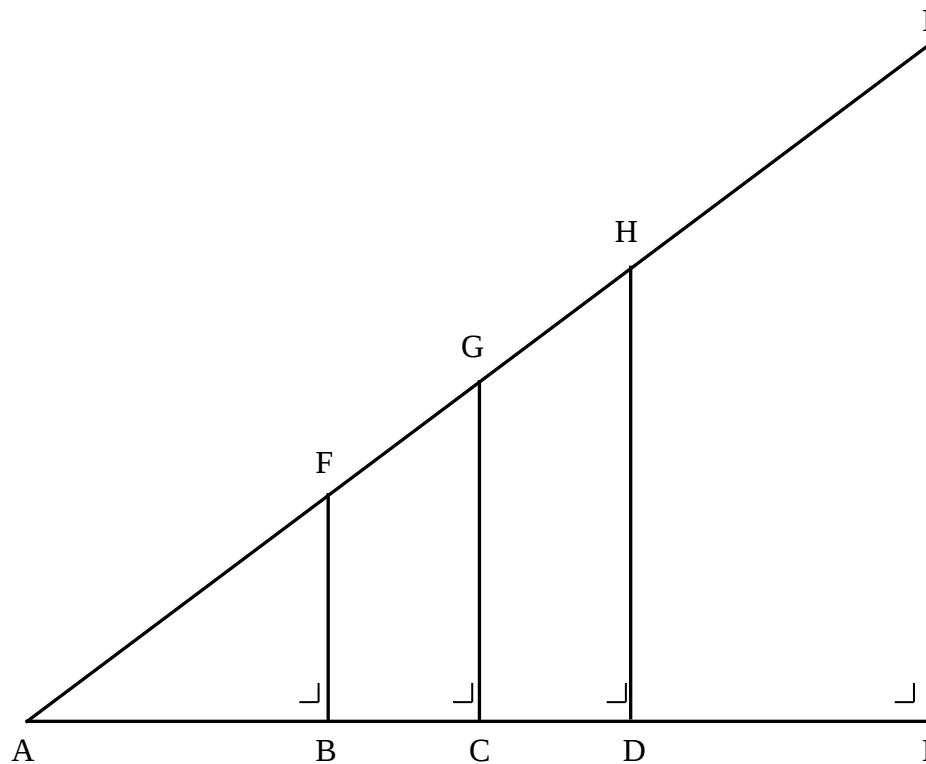
BC of a noemen we *de overstaande rechthoekszijde* van hoek A.

AB of c noemen we *de schuine zijde* of *de hypotenusa*.



Opdracht 22.12 (zie bovenstaande tekening)

- Wat is de aanliggende rechthoekszijde van $\angle B$.
- Wat is de overstaande rechthoekszijde van $\angle B$.



Opdracht 22.13 Vul de onderstaande tabel verder in (maten opmeten uit bovenstaande tekening)

(a.r. betekent: de lengte van de aanliggende rechthoekszijde van $\angle A$, o.r. betekent: de lengte van de overstaande rechthoekszijde van $\angle A$ en s.z. betekent: de lengte van de schuine zijde).

	a.r.	o.r.	s.z.	$\frac{\text{o.r.}}{\text{s.z.}}$	$\frac{\text{a.r.}}{\text{s.z.}}$	$\frac{\text{o.r.}}{\text{a.r.}}$
$\triangle ABF$	AB=	BF=	AF=			
$\triangle ACG$		CG=				
$\triangle ADH$	AD=					
$\triangle AEI$			AI=			

Je ziet dat de grootte van de verhouding: $\frac{\text{o.r.}}{\text{s.z.}}$, $\frac{\text{a.r.}}{\text{s.z.}}$ en $\frac{\text{o.r.}}{\text{a.r.}}$ niet afhangt van de grootte van de

driehoek. Deze grootte hangt alleen maar af van de grootte van de hoek A. We noemen deze verhoudingen achtereenvolgens: *de sinus* (afgekort: sin), *de cosinus* (afgekort: cos) en *de tangens* (afgekort: tan). We gaan het voorafgaande preciezer omschrijven:

Afspraak 22.6

Goniometrische verhoudingen:

$$\sin A = \frac{\text{lengte overstaande rechthoekszijde van hoek A}}{\text{lengte schuine zijde}}$$

$$\cos A = \frac{\text{lengte aanliggende rechthoekszijde van hoek A}}{\text{lengte schuine zijde}}$$

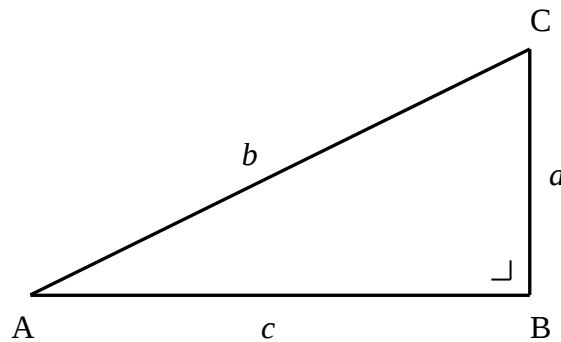
$$\tan A = \frac{\text{lengte overstaande rechthoekszijde van hoek A}}{\text{lengte aanliggende rechthoekszijde van hoek A}}$$

In de tekening hiernaast betekent dit:

$$\sin A = \frac{BC}{AC} = \frac{a}{b}$$

$$\cos A = \frac{AB}{AC} = \frac{c}{b}$$

$$\tan A = \frac{BC}{AB} = \frac{a}{c}$$



Opmerking:

1. A is een hoek, bijvoorbeeld 32° , en $\sin A$ is *een getal*! In bovenstaande tekening is:

$$\sin A = \frac{a}{b} \approx 0,529. \text{ Hetzelfde geldt natuurlijk ook voor } \cos A \text{ en } \tan A.$$

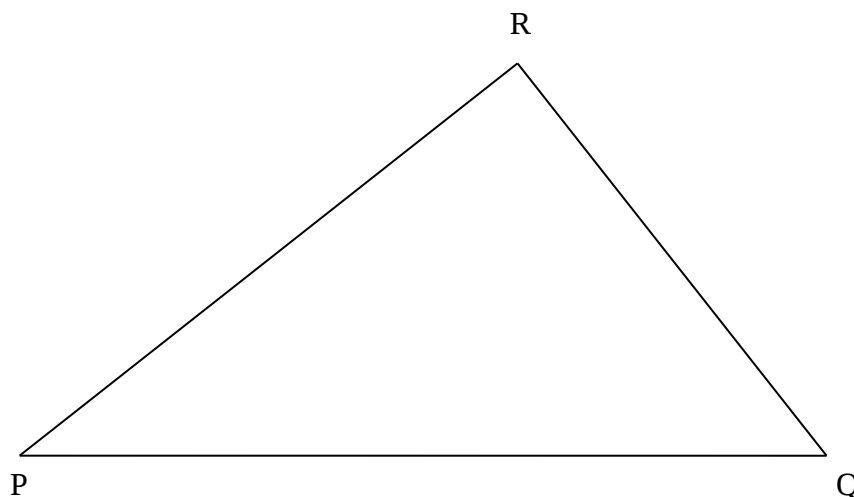
2. Maak geen gebruik van de volgende *foutieve notaties*: $\sin \angle A$ of $\angle A \sin$. Correct is alleen: $\sin A$.

Opdracht 22.14 Gegeven is $\triangle ABC$, $\angle A = 90^\circ$, $BC = 13$ cm en $AB = 5$ cm

- a. Bereken zijde AC.
- b. Bereken de goniometrische verhoudingen van $\angle B$ en $\angle C$.

Opdracht 22.15 Gegeven is $\triangle DEF$, $\angle D = 90^\circ$, $EF = 15,9$ cm en $DE = 9,2$ cm

- a. Bereken zijde DF (afroeden op 1 decimaal nauwkeurig).
- b. Bereken de goniometrische verhoudingen van $\angle E$ (afroeden op 4 decimalen nauwkeurig).



Opdracht 22.16 In $\triangle PQR$ is: $\angle R = 90^\circ$.

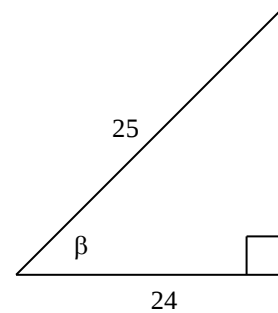
- a. Meet de zijden van $\triangle PQR$
- b. Bereken de goniometrische verhoudingen van $\angle P$.

Voorbeeld 22.5

Gegeven $\cos \beta = \frac{24}{25}$. Bereken de ontbrekende goniometrische verhoudingen.

Je schetst eerst een rechthoekige driehoek. Je noemt hierin een scherpe hoek β en je geeft de aanliggende rechthoekszijde de waarde 24 en de schuine zijde de waarde 25. Voor deze hoek geldt: $\cos \beta = \frac{24}{25}$. Je berekent nu de onbekende zijde met behulp van de stelling van Pythagoras, deze is:

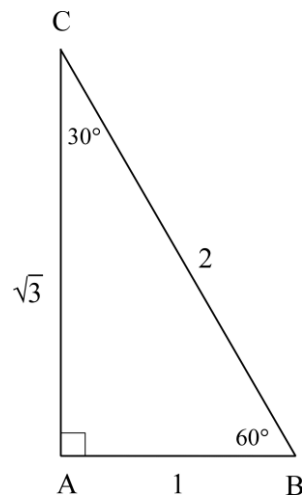
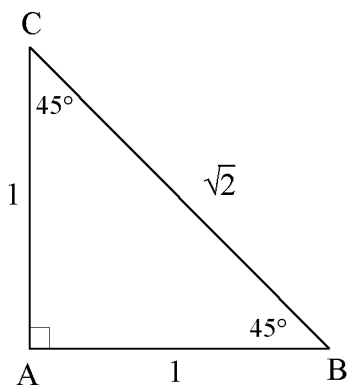
$\sqrt{25^2 - 24^2} = \sqrt{625 - 576} = \sqrt{49} = 7$ (of je ziet dat hier de Pythagorese getallen 7 – 24 – 25 staan). Met behulp van de driehoek vind je: $\sin \beta = \frac{7}{25}$ en $\tan \beta = \frac{7}{24}$.



Opdracht 22.17 Bereken de ontbrekende goniometrische verhoudingen:

- $\sin \alpha = \frac{1}{2}$
- $\tan \gamma = \frac{28}{45}$
- $\cos \beta = \frac{13}{85}$
- $\sin \delta = \frac{9}{41}$
- $\tan \varphi = 2\frac{11}{12}$

Goniometrische verhoudingen van bijzondere hoeken



Opdracht 22.18 Bereken met behulp van de bovenstaande driehoek $\sin 45^\circ$, $\cos 45^\circ$ en $\tan 45^\circ$.

Opdracht 22.19 Bereken met behulp van de bovenstaande driehoek:

- $\sin 30^\circ$, $\cos 30^\circ$ en $\tan 30^\circ$
- $\sin 60^\circ$, $\cos 60^\circ$ en $\tan 60^\circ$

De antwoorden van de opdrachten 23.18 en 23.19 zijn heel belangrijk omdat de hoeken en de verhoudingen erg vaak voorkomen. We leggen ze vast in de volgende tabel. Leer deze tabel van buiten!

α (°)	30°	45°	60°
$\sin \alpha$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}\sqrt{2}$	$\frac{1}{2}\sqrt{3}$
$\cos \alpha$	$\frac{1}{2}\sqrt{3}$	$\frac{1}{2}\sqrt{2}$	$\frac{1}{2}$
$\tan \alpha$	$\frac{1}{3}\sqrt{3}$	1	$\sqrt{3}$

Voorbeeld 22.6

Van $\triangle ABC$ is $\angle A = 90^\circ$ en $\angle B = 45^\circ$. Bereken de lengte van de hoogtelijn AD als je weet dat $BC = 6$ cm.

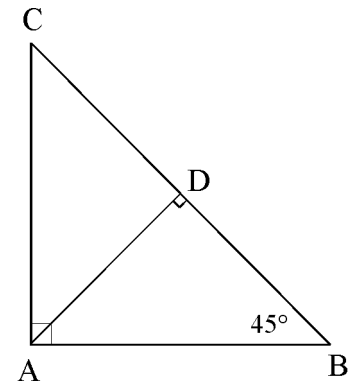
De oplossing gaat als volgt. Eerst bereken je zijde AB in $\triangle ABC$:

$$\cos B = \frac{AB}{BC} \Rightarrow \cos 45^\circ = \frac{AB}{6} \Leftrightarrow AB = 6 \times \cos 45^\circ = 6 \times \frac{1}{2}\sqrt{2} = 3\sqrt{2}$$

Daarna bereken je AD in $\triangle ABD$:

$$\sin B = \frac{AD}{AB} \Rightarrow \sin 45^\circ = \frac{AD}{3\sqrt{2}} \Leftrightarrow AD = 3\sqrt{2} \times \sin 45^\circ = 3\sqrt{2} \times \frac{1}{2}\sqrt{2} = 3$$

Dus hoogtelijn AD is 3 cm.

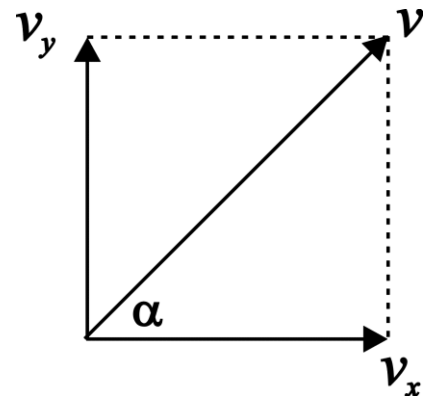


Opdracht 22.20 Van $\triangle ABC$ is $\angle A = 90^\circ$ en $\angle C = 30^\circ$. Bereken de lengte van de hoogtelijn AD als je weet dat $AB = 4$ cm.

Opdracht 22.21 Iemand rijdt een berg op, die elke meter dat hij verder komt 18 cm stijgt. We noemen de stijgingshoek α .

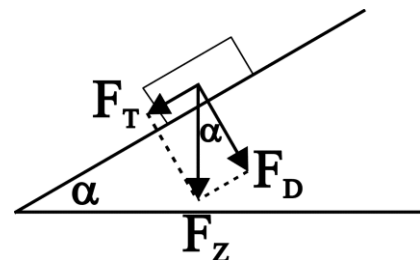
- Wat is $\sin \alpha$?
- Als hij 3,89 km heeft gereden, hoe hoog is hij dan boven de voet van de berg?

Opdracht 22.22 Een puntmassa wordt onder een hoek $\alpha = 45^\circ$ weggeschoten met een beginsnelheid $v = 20$ m/s. Hoe groot is op dat moment de snelheid in horizontale richting (v_x) en de snelheid in verticale richting (v_y)?



Opdracht 22.23 Een voorwerp met een massa $m = 40$ kg ligt op een helling met een hoek $\alpha = 30^\circ$.

- Bereken de grootte van de zwaartekracht F_Z (neem voor $g = 10$ m/s²)
- De zwaartekracht F_Z kan ontbonden worden in de componenten F_T en F_D . Bereken de grootte van deze krachten.



Opdracht 22.24 In $\triangle ABC$ is $\angle B = 90^\circ$. $AB = 4$ en $BC = 3$. Vanuit B wordt een loodlijn neergelaten op zijde AC, het snijpunt noemen we D.

- Maak een tekening van de beschreven driehoek.
- Bereken zijde AC.
- Bereken BD door $\sin A$ in $\triangle ABC$ en in $\triangle ABD$ te berekenen.
- Bereken de zijden AD en DC.