

16 Bijzondere producten

In hoofdstuk 15 heb je haakjes weggewerkt uit producten. Zo heb je onder andere gewerkt met regel 15.2: $(a + b)(c + d) = ac + ad + bc + bd$. Van een aantal bijzondere producten kun je op een snellere manier het resultaat bepalen door de regels uit dit hoofdstuk toe te passen.

Het uitwerken van haakjes

Regel 16.1 $(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$

Toelichting:

De waarheid van deze regel kan eenvoudig met behulp van regel 15.2 worden aangetoond:

$$(a + b)^2 = (a + b)(a + b) = a \cdot a + a \cdot b + b \cdot a + b \cdot b = a^2 + ab + ab + b^2 = a^2 + 2ab + b^2$$

Je neemt het kwadraat van de eerste term (" a^2 "), telt hierbij het dubbele product van de eerste en de tweede term op (" $2ab$ ") en telt tenslotte het kwadraat van de tweede term hierbij op (" b^2 ").

Voorbeeld 16.1

1. $(\underbrace{2x}_a + \underbrace{3y}_b)^2 = \underbrace{(2x)^2}_a + 2 \cdot \underbrace{(2x)}_a \cdot \underbrace{(3y)}_b + \underbrace{(3y)^2}_b = 4x^2 + 12xy + 9y^2$. Beschouw in gedachte de term $2x$ als de a en $3y$ als de b uit de regel 16.1
2. $(4p^3 + 5q^7)^2 = (4p^3)^2 + 2 \cdot (4p^3) \cdot (5q^7) + (5q^7)^2 = 16p^6 + 40p^3q^7 + 25q^{14}$. Let goed op de uitwerking van de kwadraten zoals: $(4p^3)^2 = 4^2 \cdot (p^3)^2 = 16 \cdot p^{3 \cdot 2} = 16p^6$.
3. $(\underbrace{-4x^3}_a + \underbrace{3y^5}_b)^2 = \underbrace{(-4x^3)^2}_a + 2 \cdot \underbrace{(-4x^3)}_a \cdot \underbrace{(3y^5)}_b + \underbrace{(3y^5)^2}_b = 16x^6 - 24x^3y^5 + 9y^{10}$. Bestudeer deze uitwerking goed!
4. $5a(2x^4 + 3y^3)^2 = 5a(4x^8 + 12x^4y^3 + 9y^6) = 20ax^8 + 60ax^4y^3 + 45ay^6$

Opdracht 16.1 Werk de haakjes weg uit:

- a. $(k + 1)^2 =$
- b. $(n + 3)^2 =$
- c. $(5d + 3h)^2 =$
- d. $(3b^3 + 4c^4)^2 =$
- e. $(-3p^4 + 6q^6)^2 =$
- f. $2p^2(3t^5 + 7)^2 =$

Regel 16.2 $(a - b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$

Toelichting:

De waarheid van deze regel kan eenvoudig met behulp van regel 11.1 worden aangetoond:

$$(a - b)^2 = (a + (-b))^2 = a^2 + 2 \cdot a \cdot (-b) + (-b)^2 = a^2 - 2ab + b^2.$$

Je maakt van $a - b$ de volgende optelling: $a + (-b)$ en daarom kun je regel 16.1 toepassen.

Voorbeeld 16.2

$$1. (m - 8)^2 = m^2 - 2 \cdot m \cdot 8 + 8^2 = m^2 - 16m + 64$$

$$2. (\underbrace{5s^3}_a - \underbrace{3t^8}_b)^2 = (\underbrace{5s^3}_a)^2 - 2 \cdot \underbrace{(5s^3)}_a \cdot \underbrace{(3t^8)}_b + (\underbrace{3t^8}_b)^2 = 25s^6 - 30s^3t^8 + 9t^{16}$$

Opdracht 16.2 Werk de haakjes weg uit:

- a. $(k - 1)^2 =$
- b. $(y - 3)^2 =$
- c. $(3p - 5q)^2 =$
- d. $(2c^7 - 3d^5)^2 =$
- e. $-3(2h^3 - 5n^4)^2 =$

Regel 16.3 $(a + b)(a - b) = a^2 - b^2$

Toelichting:

De waarheid van deze regel kan eenvoudig met behulp van regel 15.2 worden aangetoond:

$$(a + b)(a - b) = a \cdot a + a \cdot -b + b \cdot a + b \cdot -b = a^2 - ab + ab - b^2 = a^2 - b^2$$

We nemen dus het kwadraat van de eerste term (" a^2 ") en trekken hiervan het kwadraat van de tweede term (" b^2 ") af.

Voorbeeld 16.3

$$1. (5x + 3y)(5x - 3y) = (5x)^2 - (3y)^2 = 25x^2 - 9y^2$$

$$2. (6a^3 + 7b^5)(6a^3 - 7b^5) = (6a^3)^2 - (7b^5)^2 = 36a^6 - 49b^{10}$$

3. Door het herhaald toepassen van regel 16.3 vinden we:

$$\begin{aligned} (a - b)(a + b)(a^2 + b^2)(a^4 + b^4)(a^8 + b^8) &= \\ (a^2 - b^2)(a^2 + b^2)(a^4 + b^4)(a^8 + b^8) &= \\ (a^4 - b^4)(a^4 + b^4)(a^8 + b^8) &= \\ (a^8 - b^8)(a^8 + b^8) &= a^{16} - b^{16} \end{aligned}$$

Opdracht 16.3 Werk de haakjes weg uit:

- a. $(k + 1)(k - 1) =$
- b. $(y - 3)(y + 3) =$
- c. $(3p - 2q)(3p + 2q)(9p^2 + 4q^2) =$
- d. $(2c^7 + 3d^5)(2c^7 - 3d^5) =$
- e. $-(x^3 + y^3)(x^3 - y^3) =$

Regel 16.4 $(a + p)(a + q) = a^2 + (p + q) \cdot a + p \cdot q$

Toelichting:

De waarheid van deze regel kan eenvoudig met behulp van regel 15.2 worden aangetoond:

$$(a + p)(a + q) = a \cdot a + a \cdot q + p \cdot a + p \cdot q = a^2 + pa + qa + p \cdot q = a^2 + (p + q) \cdot a + p \cdot q$$

We nemen dus het kwadraat van de eerste term (“ a^2 ”), we tellen hierbij de som (van p en q) maal de eerste term (“ a ”) bij op en daarna tellen we het product van p en q hierbij op.

Voorbeeld 16.4

$$1. (x + 2)(x + 5) = x^2 + (2 + 5) \cdot x + 2 \times 5 = x^2 + 7x + 10$$

$$2. (a - 4)(a - 5) = (a + (-4))(a + (-5)) = a^2 + (-4 + (-5))a + (-4) \times (-5) = a^2 - 9a + 20$$

$$3. \underbrace{(3p^4)}_a + \underbrace{(7d)}_p \underbrace{(3p^4)}_a + \underbrace{(-5d)}_q = \underbrace{(3p^4)}_a^2 + \underbrace{(7d)}_p + \underbrace{(-5d)}_q \cdot \underbrace{3p^4}_a + \underbrace{7d}_p \times \underbrace{(-5d)}_q = 9p^8 + 6dp^4 - 35d^2$$

Bestudeer dit voorbeeld goed. Let op de uitwerking: $(7d + (-5d)) \cdot 3p^4 = 2d \cdot 3p^4 = 6dp^4$

Opdracht 16.4 Werk de haakjes weg uit:

- $(x + 2)(x - 3) =$
- $(a + 1)(a + 6) =$
- $(d - 3)(d + 5) =$
- $(t - 2)(t - 4) =$

Opdracht 16.5 Werk de haakjes weg uit:

- $(3x - y)(3x + y) =$
- $(a^2 - ab)(a^2 + ab) =$
- $-(\frac{1}{3}a^3 + \frac{1}{2})(\frac{1}{3}a^3 - \frac{1}{2}) =$
- $(\frac{1}{3}xy^3 + z^4)(\frac{1}{3}xy^3 - z^4) =$

Opdracht 16.6 Werk de haakjes weg uit:

- $(3x + 5)^2 =$
- $(3a^2 + a)^2 =$
- $(-2a - 3b)^2 =$
- $-(x^2y + xy^2)^2 =$

Opdracht 16.7 Werk de haakjes weg uit:

- $(a + 2b)(a - 2b)(a^2 + 4b^2) =$
- $-(2x + 3)(2x + 5) =$
- $(2a - 3b)^2 - (2a + 3b)(2a - 3b) =$
- $3(2x + y)(2x - y) - 2(x - 2y)^2 =$
- $2(a + 5)(a - 7) - (a + 5)^2 =$
- $(a - 3)(a + 3)(a^2 + 9)(a^4 + 81) =$
- $(x + 2y)^2 - 2(x - 2y)^2 =$
- $3(x + y)(x - y) - 2(x - y)^2 + 3(2x + y)(2x - 5y) =$

Ontbinden in factoren

Het omgekeerde van haakjes wegwerken is *het ontbinden in factoren*. De geleerde bijzondere producten zijn hierbij ook weer van dienst.

Bij het ontbinden van een veelterm in factoren gaan we op de volgende manier te werk. Als eerste voeren we altijd het volgende uit:



Als elke term een zelfde factor heeft, dan halen we deze factor als éérste buiten de haakjes. We maken gebruik van de regen: $ab + ac = a(b + c)$.



Als er een $-$ teken voor de hoogste macht staat, dan halen we altijd dit $-$ teken samen met de andere gemeenschappelijke factoren buiten haakjes.

Voorbeeld 16.5

1. $3a^3 - 6a^2b + 12a^2c = 3a^2(a - 2b + 4c)$
2. $-x^2 + 6x = -x(x - 6)$
3. $x \underbrace{(3y - z)}_a - p \underbrace{(3y - z)}_a = \underbrace{(3y - z)}_a(x - p)$

Opdracht 16.8 Ontbind in zoveel mogelijk factoren:

- a. $3a^3 - 2a^2b =$
- b. $3x^3 - 6x^2 - 3x =$
- c. $-6a^4 + 4a^3 + 30a^2 =$
- d. $a(x - 1) - b(x - 1) =$
- e. $(a + b)^2 + 2(a + b) =$

Voorbeeld 16.6

Isoleer l_0 uit de volgende vergelijking: $l_t = l_0 + l_0 \cdot \alpha \cdot \Delta T$. Dit gaat op dezelfde wijze:

$$l_0 + l_0 \cdot \alpha \cdot \Delta T = l_t \Leftrightarrow l_0(1 + \alpha \cdot \Delta T) = l_t \Leftrightarrow l_0 = \frac{l_t}{1 + \alpha \cdot \Delta T}$$

Opdracht 16.9 Isoleer V_0 uit de vergelijking: $V_t = V_0 + V_0 \cdot \gamma \cdot \Delta T$

Opdracht 16.10 Isoleer ΔT uit de vergelijking: $I^2 \cdot R \cdot t = m_{vl} \cdot c_{vl} \cdot \Delta T + C \cdot \Delta T$

Daarna onderzoeken we of een van de volgende situaties aanwezig is:



De veelterm bestaat uit het verschil van twee zuivere kwadraten. In dit geval gebruiken we de regel: $a^2 - b^2 = (a + b)(a - b)$.

Voorbeeld 16.7

1. $4x^2 - 9y^2 = \underbrace{(2x)^2}_a - \underbrace{(3y)^2}_b = (\underbrace{2x}_a + \underbrace{3y}_b)(\underbrace{2x}_a - \underbrace{3y}_b)$
2. $9x^8 - 16y^{10} = (3x^4)^2 - (4y^5)^2 = (3x^4 + 4y^5)(3x^4 - 4y^5)$

Opdracht 16.11 Ontbind in zoveel mogelijk factoren:

- $x^2 - 1 =$
- $a^4 - 1 =$
- $16 - a^8 =$
- $(x + y)^2 - z^2 =$
- $(2a + 3)^2 - 4 =$



De veelterm bestaat uit de som van twee kwadraten en een dubbelproduct van de basisvormen, welke de kwadraten opleveren. Hier maken we gebruik van de regel:
 $a^2 \pm 2ab + b^2 = (a \pm b)^2$.

Voorbeeld 16.8

- $25x^2 + 30xy + 9y^2 = \underbrace{(5x)^2}_a + 2 \cdot \underbrace{(5x)}_a \cdot \underbrace{(3y)}_b + \underbrace{(3y)^2}_b = (5x + 3y)^2$
- $x^2 - 4xy + 4y^2 = (x)^2 - 2 \cdot (x) \cdot (2y) + (2y)^2 = (x - 2y)^2$
- $-x^2 + 6x - 9 = -(x^2 - 6x + 9) = -(x - 3)^2$

Opdracht 16.12 Ontbind in zoveel mogelijk factoren:

- $4x^2 + 4xy + y^2 =$
- $9a^2 - 24a + 16 =$
- $-81x^2 - 9x - \frac{1}{4} =$
- $x^4 - 2x^2 + 1 =$
- $x^{10} - \frac{2}{3}x^5 + \frac{1}{9} =$



De veelterm is een vorm van het type: $x^2 + a \cdot x + b$. In dit geval zoeken we twee getallen p en q , waarvoor geldt: $a = p + q$ en $b = p \times q$. (Zie ook regel 11.4)

Bij het zoeken van de geschikte getallen gaan we te werk volgens het onderstaande schema:

Product b is:	som a is:	“kleinste getal”	“grootste getal”
+	+	+	+
+	–	–	–
–	+	–	+
–	–	+	–

Opmerking:

We hebben “kleinste getal” en “grootste getal” tussen “ ” geplaatst, omdat men dit niet letterlijk moet nemen. Als we de getallen 6 en 14 hebben. Dan is 6 het “kleinste getal” en 14 het “grootste getal”. Als in de tabel staat “kleinste getal” + en “grootste getal” –, dan bedoelen we plaats voor 6 het plusteken en voor 14 het minteken. Op deze wijze krijgen we de getallen +6 en –14, maar nu geldt natuurlijk dat +6 groter is dan –14.

Voorbeeld 16.9

Ontbindt $x^2 - 11x + 24 =$ in factoren. Het product (“+24”) van de getallen p en q is positief (“+”), dus de getallen p en q zijn beide positief (“+”) of p en q zijn beide negatief (“-”). Omdat de som (“-11”) van de getallen negatief (“-”) is weet je dat beide getallen negatief (“-”) zijn. Je bekijkt alle mogelijke combinaties van gehele getallen p en q , welke als product 24 opleveren, je plaatst de “+” en “-” tekens en je bepaalt de som:

Product is: 24	plaats + en – tekens:	Som is:
1×24	-1×-24	$-1 + -24 = -25$
2×12	-2×-12	$-2 + -12 = -14$
3×8	-3×-8	$-3 + -8 = -11$
4×6	-4×-6	$-4 + -6 = -10$

Je ziet dat alleen de derde mogelijkheid de juiste is. Zo kom je tot de volgende ontbinding in factoren: $x^2 - 11x + 24 = (x - 3)(x - 8)$

Voorbeeld 16.10

Ontbindt $x^2 - 4x - 12 =$ in factoren. Het product (“-12”) van de gezochte getallen p en q is negatief (“-”), dus één van de getallen p en q is positief (“+”) en de andere is negatief (“-”). Omdat de som (“-4”) van de getallen negatief (“-”) is weet je dat de “kleinste” van de getallen positief (“+”) is en dat de “grootste” van de getallen negatief (“-”) is. Je bekijkt alle mogelijke combinaties van gehele getallen p en q , welke als product 12 opleveren, je plaatst de “+” en “-” tekens en je bepaalt de som:

product is: 12	plaats + en – tekens:	Som is:
1×12	$+1 \times -12$	$+1 + -12 = -11$
2×6	$+2 \times -6$	$+2 + -6 = -4$
3×4	$+3 \times -4$	$+3 + -4 = -1$

Je ziet dat alleen de tweede mogelijkheid de juiste is. Zo kom je tot de volgende ontbinding in factoren: $x^2 - 4x - 12 = (x + 2)(x - 6)$

Opdracht 16.13 Ontbind in zoveel mogelijk factoren:

- | | |
|-----------------------|-----------------------|
| a. $x^2 + 5x + 6 =$ | e. $x^2 + 10x + 16 =$ |
| b. $x^2 - 5x - 6 =$ | f. $x^2 + 6x - 16 =$ |
| c. $x^2 - 10x + 16 =$ | g. $a^2 - 23a + 90 =$ |
| d. $x^2 - 6x - 16 =$ | h. $a^2 + a - 30 =$ |

Opdracht 16.14 Ontbind in zoveel mogelijk factoren:

- | | |
|-----------------------|-----------------------|
| a. $x^2 - 12x + 36 =$ | e. $x^2 - 11x - 80 =$ |
| b. $x^2 + x - 20 =$ | f. $x^2 + x - 42 =$ |
| c. $x^2 + 8x + 12 =$ | g. $x^2 - 4x =$ |
| d. $x^2 - 12x + 20 =$ | h. $5x^2 - 20x =$ |

Opdracht 16.15 Ontbind in zoveel mogelijk factoren:

- | | |
|-----------------------|---------------------|
| a. $x^2 - 12 - 4x =$ | c. $x^2 - 90 + x =$ |
| b. $36 + x^2 - 20x =$ | d. $p^2 - 49 =$ |



De vorm is een vierterm, waarbij de volgende patroon aanwezig is: (zie ook regel 10.2)

$$a \cdot c + a \cdot d + b \cdot c + b \cdot d =$$

$$a \cdot (c + d) + b \cdot (c + d) =$$

$$(a + b)(c + d)$$

Voorbeeld 16.11

$$2ab - 3ac - 4bd + 6cd = \underbrace{a(2b - 3c)}_{\text{gelijke factor}} - \underbrace{2d(2b - 3c)}_{\text{gelijke factor}} = \underbrace{(2b - 3c)}_{\text{gelijke factor}}(a - 2d)$$

Zoek alle gemeenschappelijke factoren in *de eerste twee termen*, dit is de factor: a . Als je deze buiten haakjes haalt staat binnen de haakjes $2b - 3c$. Haal daarna bij de derde en vierde term een factor weg, zodat ook hier binnen de haakjes blijft staan: $2b - 3c$. Dit kan door: $-2d$ buiten haakjes te halen. Nu kun je opnieuw *de gelijke factor*: $(2b - 3c)$ buiten haakjes halen, waardoor er binnen de nieuwe haakjes $(a - 2d)$ komt te staan.

Opdracht 16.16 Ontbind in zoveel mogelijk factoren:

a. $x^3 - 2x^2 + x - 2 =$

b. $6ab - 9b^2 - 4ac + 6bc =$

c. $ax^2 - bx^2 - axy + bxy =$

d. $ab^2 - ay^2 + b^2x - xy^2 =$

Opdracht 16.17 Ontbind in zoveel mogelijk factoren: (diverse regels toepassen)

a. $x^2 + 2xy + y^2 - z^2 =$

b. $-3x^2 - 6xy - 3y^2 =$

c. $x^4 - 5x^2 + 4 =$

d. $x^3 + x^2 - x - 1 =$

e. $p^2 + 2p - 399 =$

f. $x^3 + x^2 - 156x =$

Breuken vereenvoudigen door middel van ontbinden in factoren

Als we in een breuk de teller en de noemer hebben ontbonden in factoren, dan mogen we de gelijke factoren tegen elkaar wegdelen.

Voorbeeld 16.12

$$1. \frac{9 - x^2}{-x^2 + 4x - 3} = \frac{-(x^2 - 9)}{-(x^2 - 4x + 3)} = \frac{\cancel{x+3}(\cancel{x-3})}{\cancel{x-1}(\cancel{x-3})} = \frac{x+3}{x-1}$$

$$2. \frac{x^3 - x}{4x + 2} \times \frac{2x + 1}{x^2 - x} = \frac{x(x^2 - 1)}{2(2x + 1)} \times \frac{2x + 1}{x(x - 1)} = \frac{\cancel{x}(x+1)(\cancel{x-1})(2x+1)}{2\cancel{x}(2x+1)(x-1)} = \frac{x+1}{2}$$

$$3. \frac{x^2 - 9}{x^2 + 4x + 3} : \frac{x - 3}{x^2 + x} = \frac{(x+3)(x-3)}{(x+1)(x+3)} \times \frac{x(x+1)}{x-3} = \frac{\cancel{x+3}(\cancel{x-3})(x+1)}{(\cancel{x+1})(x+3)(x-3)} = x$$

Opdracht 16.18 Vereenvoudig door middel van ontbinden in factoren:

a. $\frac{x^2 - 3x}{x^2 - 5x} =$

b. $\frac{a^2 - b^2}{(a+b)^2} =$

c. $\frac{x^2 - 1}{x - x^2} =$

d. $\frac{x^2 - 2xy + y^2}{3x - 3y} =$

e. $\frac{1 - x^2}{4x^2 - 4x} =$

f. $\frac{x^2 + 5x + 4}{x^2 + 7x + 12} =$

g. $\frac{x^2 - 5x + 6}{x^2 - 4} =$

h. $\frac{x^2 - 4x + 3}{x^2 - 2x + 1} =$

i. $\frac{x^2 - 10x + 21}{x^2 - 6x + 9} =$

j. $\frac{x^3 + x^2 - x - 1}{x^3 - x^2 + x - 1} =$

Opdracht 16.19 Bereken en vereenvoudig zoveel mogelijk het eindantwoord:

a. $\frac{x^2 + x - 6}{x^2 + x - 20} \times \frac{x^2 + 2x - 24}{x^2 + 2x - 3} \times \frac{x^2 + 4x - 5}{x^2 + 4x - 12} =$

b. $\left(\frac{a^2 - 1}{a^2 - a - 2} : \frac{a^2 + 3a}{a^2 + a - 6}\right) : \frac{a^4 - a^3}{a^4} =$

c. $\left(\frac{x+2}{x-2}\right)^2 \times \frac{x-2}{x^2-4} =$

d. $\left(1 + \frac{x}{y}\right) : \left(1 + \frac{y}{x}\right) =$

e. $\frac{1}{x-2} - \frac{4}{x^2-4} =$

f. $\frac{1}{x^2-x} - \frac{1}{x^2-1} =$

g. $\left(\frac{1}{x^2} - \frac{1}{25}\right) : \left(\frac{1}{x} - \frac{1}{5}\right)^2 =$

