

6 Het werken met letters

Bij het oplossen van rekenkundige problemen, wordt meestal voor hetgeen we willen berekenen een letter geschreven. Zo'n letter noem je in de wiskunde een *onbekende* (van onbekend getal) of een *variabele* (willekeurig getal). Hierdoor ben je in staat om een stuk tekst, waarin het probleem omschreven staat terug te brengen tot een vergelijking, welke als je weet hoe en met vergelijkingen moet omgaan veel overzichtelijker is. Ook worden letters vaak gebruikt in formules en regels. We geven hiervan een paar voorbeelden:

Regel 6.1	Voor alle getallen a en b geldt:	(de commutatieve eigenschap)
	$a + b = b + a$	
	$a \times b = b \times a$	

Toelichting:

1. Voor variabelen gebruiken we voornamelijk *kleine letters*. Gebruik geen hoofdletters en kleine letters door elkaar. Wiskundig gezien zijn a en A **niet identiek**, deze letters kunnen dus verschillende waarden voorstellen.
2. De volgorde van getallen bij het optellen of het vermenigvuldigen is niet belangrijk. We krijgen altijd hetzelfde eindresultaat.
3. Het symbool $\neq$ betekent: *is niet gelijk aan*.
4. De commutatieve eigenschap geldt niet voor elke bewerking! Zo geldt in het algemeen:
 $a - b \neq b - a$ bijvoorbeeld: $7 - 3 \neq 3 - 7$, $a : b \neq b : a$ bijvoorbeeld: $8 : 4 \neq 4 : 8$ en $a^b \neq b^a$
bijvoorbeeld: $2^3 \neq 3^2$. Bij dit soort bewerkingen is dus de volgorde van de getallen juist wel van belang.

Regel 6.2	Voor alle getallen a , b en c geldt:	(de associatieve eigenschap)
	$a + (b + c) = (a + b) + c = a + b + c$	
	$a \times (b \times c) = (a \times b) \times c = a \times b \times c$	

Toelichting:

Als je meer dan een optelling of een vermenigvuldiging moet uitvoeren, dan is de volgorde hoe je deze optelling of vermenigvuldiging uitvoert niet belangrijk.



In de wiskunde hoef je niet veel te leren. Maar het is wel van essentieel belang dat je de weinige regels die je gebruikt van buiten kent en dat je alle regels consequent toepast.

Als a een onbekende voorstelt, dan is: $a + a = 2a$. Bedenk dat je in de wiskunde het $\times$ teken tussen een getal en een letter weglaat, dus met $2a$ bedoel je $2 \times a$.

Vergelijk dit met: $5 + 5 = 2 \times 5$ of met: $9 + 9 = 2 \times 9$.

Zo betekent: $5a = 5 \times a = a + a + a + a + a$.

Regel 6.3 $na = \underbrace{a + a + a + \dots + a}_{\text{komt } n \text{ maal voor}}$

Hoewel je op dit moment zowel n als ook a niet kent, gebruiken we verschillende namen voor deze letters. We noemen a een onbekende of een variabele en n heet een *coëfficiënt*.

In de volgende berekening geldt: $3a + 2a = \underbrace{a + a + a}_{3a} + \underbrace{a + a}_{2a} = 5a$. Omdat elke onbekende a

dezelfde waarde heeft kun je deze allemaal bij elkaar optellen. Dit in tegenstelling tot de volgende berekening: $3a + 2b$. Hierin kunnen a en b verschillende waarden voorstellen en daarom kun je deze vormen niet verder optellen.

Regel 6.4 $na + ma = (n + m)a$

Voorbeeld 6.1

1. Een toepassing van de bovenstaande regel is: $5a + 2a = (5+2)a = 7a$. Je telt dus alleen de coëfficiënten bij elkaar op en vermenigvuldigt het antwoord van de optelling met de onbekende.
2. Op dezelfde wijze is: $9b - 9b = (9 - 9)b = 0 \cdot b = 0$
3. $4c + c = 4 \cdot c + 1 \cdot c = (4 + 1) \cdot c = 5c$

Voorbeeld 6.2

We bekijken de volgende berekening: $3a + 4b + 7a - 8b$

In deze berekening kun je $3a$ en $7a$ bij elkaar optellen, we noemen deze *gelijksoortige* termen. Ook kun je $4b$ en $8b$ van elkaar aftrekken, want deze zijn ook gelijksoortig. Echter je kunt $3a$ en $4b$ niet bij elkaar optellen, want deze zijn ongelijksoortig! Zo kom je tot het volgende antwoord van de berekening:

$$3a + 4b + 7a - 8b = 3a + 7a + 4b - 8b = (3 + 7)a + (4 - 8)b = 10a + -4b = 10a - 4b.$$

Voorbeeld 6.3

$$3a^2 + 9ab - 8b^2 + 5a - 7a^2 + 3ab + 6b^2 + a - 3b$$

De gelijksoortige termen in deze opdracht zijn: $3a^2$ en $-7a^2$, $9ab$ en $3ab$, $-8b^2$ en $6b^2$, $5a$ en a . Let op: $-3b$ heeft dus geen andere gelijksoortige term in deze berekening. Het antwoord van deze berekening is dus:

$$3a^2 + 9ab - 8b^2 + 5a - 7a^2 + 3ab + 6b^2 + a - 3b =$$

$$3a^2 - 7a^2 + 9ab + 3ab - 8b^2 + 6b^2 + 5a + a - 3b =$$

$$-4a^2 + 12ab - 2b^2 + 6a - 3b$$

- ☞ Een term, welke uit meer dan een factor bestaat, schrijf je als volgt op:
 “Een plus- of een minteken gevolgd door cijfers gevolgd door letters, welke in alfabetische volgorde worden genoteerd.”
- ☞ Bij het vermenigvuldigen ga je als volgt te werk:
- Vermenigvuldig de “plus-” en “mintekens” met elkaar
 - Vermenigvuldig de getallen met elkaar
 - Vermenigvuldig dezelfde letters (variabelen) met elkaar

Voorbeeld 6.4

$2a \times 3ab = 2 \times a \times 3 \times a \times b = 2 \times 3 \times a \times a \times b = 6a^2b$. Dit wordt **nooit** geschreven als: $a^2b \times 6$, of als: a^2b6 , of als: a^26b , of als: $6ba^2$.

Opdracht 6.1 Plaats gelijksoortige termen bij elkaar en reken uit.

- a. $8x + 7 - 3x + 5 =$
- b. $6a - 2b - 5a + 7b =$
- c. $8t - 4 + 4t - 4 =$
- d. $9p + 3q - 2p - 3q + 8p - 4q - 3p + 7q =$

Opdracht 6.2 Plaats gelijksoortige termen bij elkaar en reken uit.

- a. $3x^2 + 5x - 4 - 2x^2 - 7x + 8 =$
- b. $6a^3 + 8a^2 - 7a - 3 - 3a^3 - 4a^2 - 8a + 7 =$
- c. $6p^3 - 4p^2 + 9q^2 - p^3 + 6p^2 - 4q^2 =$
- d. $-3t^2 + 6t - 8 + 7t^2 - 4t + 9 =$

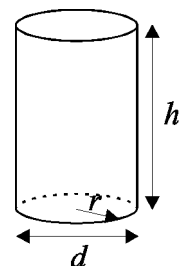
Opdracht 6.3 Plaats gelijksoortige termen bij elkaar en reken uit.

- a. $8a^2 + 3ab - b^2 - 3a^2 - 5ab + 4b^2 =$
- b. $7x^2 - 9xy + 5y^2 - 2x^2 + 3xy - y^2 =$
- c. $5a^2b - 7ab^2 - 8a^2b + 2ab^2 =$
- d. $5p^3q^2 - 8p^2q + 7pq^2 + 2p^3q^2 + 3p^2q - 5pq^2 =$

Opdracht 6.4 Tel de gelijksoortige termen bij elkaar op:

- a. $4p^3 + 5p^2 - 6p + 10 - 7p^3 + 4p^2 - 10p - 4 =$
- b. $3x^2 - 4y^2 + 8x^2 - 7y =$
- c. $8a^2b - 4ab^2 - 6a^2b + 5ab^3 - 9ab^2 + 8ab^2 =$

Opdracht 6.5 Een cilinder is een figuur, waarbij het boven- en het ondervlak een cirkel is. Het oppervlak van een cirkel kun je berekenen met de formule: $A = \pi r^2$. Voor de mantel van de cilinder kun je het oppervlak berekenen met de formule: $A = 2\pi rh$. Maak een formule waarmee je de totale oppervlakte van een cilinder kunt bepalen (tel zoveel mogelijk termen bij elkaar op!).



In het bovenstaande hebben we vormen als a^2 gebruikt. Deze vormen ontstaan uit de vermenigvuldiging van twee dezelfde factoren: $a \times a = a^2$. We vatten dit samen in de volgende regel.

Regel 6.5 $a^n = \underbrace{a \times a \times a \times \dots \times a}_{\text{komt } n \text{ maal voor}}$
--

- | |
|---|
| <p> Als we een machtsverheffing opschrijven, bijvoorbeeld: a^n, dan heet a het grondtal en we noemen n de exponent. Dus: <i>macht</i> = <i>grondtal</i>^{exponent}.</p> <p> Je spreekt a^n uit als: “a tot de macht n” of als: “a tot de n-de”.</p> |
|---|

In de volgende berekening geldt: $a^3 \times a^2 = \underbrace{a \times a \times a}_{a^3} \times \underbrace{a \times a}_{a^2} = a^5$. Omdat elke onbekende a

dezelfde waarde heeft kun je ze allemaal met elkaar vermenigvuldigen. Dit in tegenstelling tot de berekening: $a^3 \times b^2$. Hierin kunnen a en b verschillende waarden voorstellen en daarom kun je deze vorm niet verder vermenigvuldigen.

Regel 6.6 $a^n \times a^m = a^{n+m}$

Toelichting:

Met de notatie a^{n+m} bedoelen we eigenlijk: $a^{(n+m)}$. We laten echter altijd de haakjes omwille van de overzichtelijkheid weg.

Voorbeeld 6.5

Een toepassing van de bovenstaande regel is: $a^5 \times a^2 = a^{5+2} = a^7$. We tellen bij het vermenigvuldigen van getallen met *hetzelfde grondtal* de exponenten bij elkaar op.

Voorbeeld 6.6

We bekijken de volgende berekening: $a^3 \times b^4 \times a^7 \times b^2$

In deze berekening kun je a^3 en a^7 met elkaar vermenigvuldigen, we noemen deze *gelijknamige* factoren. Ook kun je b^4 en b^2 met elkaar vermenigvuldigen, want ook deze zijn gelijknamig. Echter je kunt niet a^3 en b^4 verder met elkaar vermenigvuldigen, want deze zijn ongelijknamig! Zo kom je tot het volgende antwoord van de berekening:

$$a^3 \times b^4 \times a^7 \times b^2 = a^3 \times a^7 \times b^4 \times b^2 = a^{3+7} \times b^{4+2} = a^{10} \times b^6 = a^{10} \cdot b^6 = a^{10}b^6$$

Voorbeeld 6.7

We bekijken de volgende berekening: $3a^4 \times 5b^2 \times 4a \times b^6 \times c^6$

Bedenk dat we de $\times$ tekens tussen 3 en a^4 en tussen 5 en b^2 enzovoorts hebben weggelaten!

De gelijknamige factoren zijn: a^4 en $a (= a^1)$, b^2 en b^6 . Ook de getallen: 3, 5 en 4 zijn als gelijknamige factoren te beschouwen. Let op: c^6 heeft geen andere gelijknamige factor in deze berekening. Het antwoord van deze berekening is dus:

$$3a^4 \times 5b^2 \times 4a \times b^6 \times c^6 = 3 \times 5 \times 4 \times a^4 \times a^1 \times b^2 \times b^6 \times c^6 = 60 \times a^{4+1} \times b^{2+6} \times c^6 = 60a^5b^8c^6$$

Opdracht 6.6 Plaats de gelijknamige factoren bij elkaar en reken uit.

- a. $a^2 \times b^3 \times a^4 \times b^5 =$
- b. $a^6 \times b^4 \times c^2 \times a^3 \times b^3 \times c =$
- c. $x^3 \times y^2 \times z^5 \times x^2 \times y^5 \times z^3 =$
- d. $p^6 \times q^2 \times r \times p^4 \times q^6 \times r^7 =$

Opdracht 6.7 Plaats de gelijknamige factoren bij elkaar en reken uit.

- a. $4a^2 \times 3a^2 =$
- b. $7x^3 \times 3x^7 =$
- c. $4p^4 \times 5p^2 =$
- d. $2y \times 7y^4 =$

Opdracht 6.8 Plaats de gelijknamige factoren bij elkaar en reken uit.

- a. $4a^2b \times 3ab^4 \times 5a^3b^6 =$
- b. $6x^4y \times 2x^3y^3 \times 3x^4y^5 =$
- c. $3pq^2 \times 2p^2q^4 \times 5p^3q =$
- d. $r^2st^3 \times 4r^3s^5t^4 \times 3r^4s^2t =$

Opdracht 6.9 Bereken het volgende:

- a. $a \times a \times b^2 \times b =$
- b. $3a^6 \times 2b^5 \times c \times 4a^3 \times 5b^7 \times 2c^4 =$
- c. $5x^7 \times 2y^5 \times x^6 \times y^2 \times 4z^3 =$

Opdracht 6.10 Bereken het volgende (let op dat je gelijksoortige termen optelt):

- a. $d^5 \times d^3 + d^4 \times d^2 =$
- b. $p^3 \times p^2 + p \times p^4 =$
- c. $3x^4 + 2x^2 \times x + 5x \times x^3 - 4x^3 =$
- d. $6a^3b + 2a \times a^2 \times 3b - 5a \times 2b^2 =$

Ook als je met wetenschappelijke notatie werkt, dan kun je regel 6.6 toepassen.

Zo is:

$$4 \cdot 10^5 \times 3 \cdot 10^3 = 4 \times 3 \times 10^5 \times 10^3 = 12 \times 10^{5+3} = 12 \times 10^8 = 1,2 \times 10^1 \times 10^8 = 1,2 \times 10^{1+8} = 1,2 \cdot 10^9$$

Opdracht 6.11 Reken zonder rekenmachine uit (antwoorden in wetenschappelijke notatie geven):

- a. $2 \cdot 10^3 \times 3 \cdot 10^5 =$
- b. $4 \cdot 10^5 \times 2 \cdot 10^3 =$
- c. $5 \cdot 10^2 \times 3 \cdot 10^6 =$
- d. $4 \cdot 10^3 \times 2 \cdot 10^5 \times 3 \cdot 10^2 =$

Opdracht 6.12 Werk op dezelfde manier als hierboven de volgende berekeningen uit:

- a. $2 \cdot 10^7 \times 4 \cdot 10^8 =$
- b. $4 \cdot 10^5 \times 6 \cdot 10^9 =$
- c. $8 \cdot 10^7 \times 3 \cdot 10^6 \times 2 \cdot 10^9 =$