

15 Het wegwerken van haakjes

Heel vaak kom je berekeningen tegen waarin met haakjes wordt gewerkt. Om berekeningen of formules, waarin deze haakjes staan, te vereenvoudigen zul je deze haakjes eerst wegwerken. Waarna je dan in staat bent om bijvoorbeeld gelijksoortige termen bij elkaar op te tellen. Het wegwerken van haakjes gaat met regel 15.1.

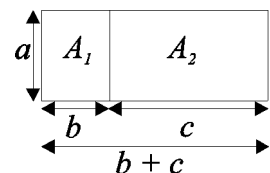
Regel 15.1 Voor alle getallen a , b en c geldt: (de distributieve eigenschap)
 $a(b + c) = ab + ac$

Toelichting:

1. Let er op dat we in de bovenstaande regel de $\cdot$ tekens niet opschrijven. Als we deze wel allemaal aangeven, dat heeft de regel de volgende vorm: $a \cdot (b + c) = a \cdot b + a \cdot c$
 Bijvoorbeeld: $3 \cdot (2 + 5) = 3 \cdot 2 + 3 \cdot 5 = 6 + 15 = 21$. Controle: $3 \cdot (2 + 5) = 3 \cdot 7 = 21$.
2. We vermenigvuldigen de factor a met *elke* term binnen de haakjes. Dus factor a wordt vermenigvuldigd met term b en met term c . Ook als er meer dan twee termen binnen de haakjes staan, dan gebeurt op dezelfde wijze. Bijvoorbeeld:
 $a(b + c + d + e) = ab + ac + ad + ae$
3. Schematisch doen we dus: $a \cdot (b + c)$

$\begin{array}{c} | \quad \uparrow \quad \uparrow \\ \times \quad \text{---} \end{array}$
4. Verwar de distributieve eigenschap niet met de associatieve eigenschappen uit regel 6.2. We hebben drie regels met haakjes:
 $a \cdot (b + c) = a \cdot b + a \cdot c$ (hierin komen de bewerkingen: $\times$ en $+$ voor)
 $a + (b + c) = a + b + c$ (regel 6.2 hierin staat alleen de bewerking: $+$)
 $a \cdot (b \cdot c) = a \cdot b \cdot c$ (regel 6.2 hierin staat alleen de bewerking: $\times$)
5. Nu we toch met letters aan het spelen zijn:
 $a + (b \cdot c) = a + bc$
 en dus **niet**: $a + (b \cdot c) = a + b \cdot a + c$!

Opdracht 15.1 Laat door de oppervlaktes A_1 en A_2 en het totale oppervlak $A_1 + A_2$ te berekenen zien dat de distributieve eigenschap waar is.



Voorbeeld 15.1

Voorbeelden van het wegwerken van haakjes zijn:

1. $6 \cdot (2p + 3q) = 6 \cdot 2p + 6 \cdot 3q = 12p + 18q$
2. $p(p^2 + 2p + 3) = p \cdot p^2 + p \cdot 2p + p \cdot 3 = p \cdot p \cdot p + 2 \cdot p \cdot p + 3 \cdot p = p^3 + 2p^2 + 3p$

Opdracht 15.2 Werk de haakjes weg uit:

- a. $3 \cdot (a + b) =$
- b. $5 \cdot (c + 3d) =$
- c. $6(2x^2 + 4xy + 7y^2) =$
- d. $a(a^2b + ab + b^2) =$

Als je met negatieve getallen, of met een minteken voor een letter gaat vermenigvuldigen of delen, dan bepaal je met de volgende regels het nieuwe teken:

Schema 15.1 Vermenigvuldigen en delen positieve en negatieve getallen:

$+$	$\times$	$+$	$=$	$+$	$+$	$:$	$+$	$=$	$+$
$+$	$\times$	$-$	$=$	$-$	$+$	$:$	$-$	$=$	$-$
$-$	$\times$	$+$	$=$	$-$	$-$	$:$	$+$	$=$	$-$
$-$	$\times$	$-$	$=$	$+$	$-$	$:$	$-$	$=$	$+$

Toelichting:

Als géén teken voor een getal of een letter staat, dan dien je hier (in gedachte) een $+$ teken voor te plaatsen.

We kunnen de distributieve eigenschap ook toepassen als er een verschil van twee termen tussen de haakjes staat. Immers: $a(b - c) = a \cdot b + a \cdot -c = ab - ac$.
Kortweg worden de haakjes als volgt weggewerkt: $a(b - c) = ab - ac$

Voorbeeld 15.2

We passen dit toe in de volgende voorbeelden:

1. $4 \cdot (5d - 6e) = 4 \cdot (5d + -6e) = 4 \cdot 5d + 4 \cdot -6e = 20d - 24e$
2. $p \cdot (p^3 + 7p^2 - p - 5) = p \cdot p^3 + p \cdot 7p^2 + p \cdot -p + p \cdot -5 = p^4 + 7p^3 - p^2 - 5p$

Voorbeeld 15.3

Ook als er een minteken in de factor voor de haakjes staat ga je op dezelfde wijze te werk.

Een voorbeeld van dit is:

$$-5a(3a^2c - 4ac + 7c^2 - 8) = -5a \cdot 3a^2c + -5a \cdot -4ac + -5a \cdot 7c^2 + -5a \cdot -8 =$$

$$-15a^3c + 20a^2c - 35ac^2 + 40a$$

Opdracht 15.3 Werk de haakjes weg en vereenvoudig:

- $5(a + 3) - 3(3a - 4) + 2(2a - 9) =$
- $2p(p + 3) - 5(p^2 - p + 1) + 3(p^2 - 4p) =$
- $3a^2(a^2 - 2) - 5a(a^2 + 2) + 2(a^3 + 3a^2 + 5a) =$
- $4c^2 + 2c(c - 4) - 3(2c^2 - 3c + 1) =$
- $6a(a + 2b) - 3b(2a + b) - 3(2a^2 + 2ab - b^2) =$



Als er alleen een + teken voor de haakjes staat, dan dien je hiervoor +1 te lezen. Zo wordt:
 $+(a - b + c - d) = +1 \cdot (a + -b + c + -d) = +1 \cdot a + 1 \cdot -b + 1 \cdot c + 1 \cdot -d =$
 $a - b + c - d$

Het netto effect is: als je + (...) hebt, dan kun je de haakjes gewoon weglaten, alle tekens voor de termen blijven gelijk.



Als er géén teken voor de (...) staat, dan is dit gelijk aan: +(...)



Als er alleen een - teken voor de haakjes staat, dan dien je hiervoor -1 te lezen. Zo wordt:
 $-(a - b + c - d) = -1 \cdot (a + -b + c + -d) = -1 \cdot a + -1 \cdot -b + -1 \cdot c + -1 \cdot -d =$
 $-a + b - c + d$

Het netto effect is als je - (...) hebt, dan kun je de haakjes gewoon weglaten, maar bij elke term wijzigt het teken, dus + wordt - en - wordt +.

Toelichting:

Let op het verschil in betekenis tussen de volgende vormen:

- $-4^2 = -1 \cdot 4^2 = -1 \cdot 4 \cdot 4 = -16$
- $(-4)^2 = -4 \cdot -4 = +16$

Opdracht 15.4: Werk de haakjes weg en vereenvoudig:

- $2a - 3 + (3a - 5) - (5a - 8) =$
- $t + 2u + (u - 2t) - (-t + 3u) =$
- $4x^2 - 3x + 5 - (4x^2 + 5x) + (8x - 4) =$
- $2p^2 + (5p - 3) - (p^2 - 4p + 2) =$
- $t^2 - 2t + (t^2 - 3t + 4) - (t^2 - 5t + 3) =$
- $(x^2 - 4) + (3x - 2) - (x^2 + 3x - 6) =$
- $a^2 - ab + (b^2 - ab) - (a^2 - 2ab + b^2) =$
- $-(3m + n - 2) - (2n - 3) + (4m + 3n - 3) =$
- $x - 2y - \{3x - y - (2x + y)\} =$
- $2a - 3 + \{(3a - 5) - (2a - 3)\} =$

Het wegwerken van haakjes, waarbij elke factor bestaat uit de optelling van twee termen gaat met behulp van regel 15.2.

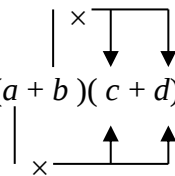
Regel 15.2 Voor alle getallen a, b, c en d geldt:
 $(a + b)(c + d) = ac + ad + bc + bd$

Toelichting:

- Je vermenigvuldigt dus elke term van de eerste factor met elke term van de tweede factor. Met tussenstappen aangegeven doe je:

$$(a + b)(c + d) = a(c + d) + b(c + d) = ac + ad + bc + bd$$

- Schematisch doen we dus: $(a + b)(c + d)$

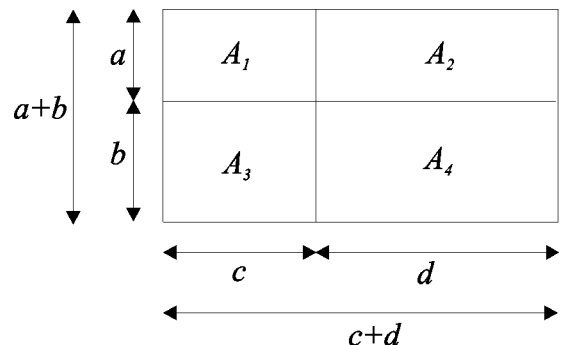


Voorbeeld 15.4

We werken een voorbeeld van een opdracht uit:

$$(2a^2 + 5a)(a^2 - 9a) = 2a^2 \cdot a^2 + 2a^2 \cdot -9a + 5a \cdot a^2 + 5a \cdot -9a = 2a^4 - 18a^3 + 5a^3 - 45a^2 = 2a^4 - 13a^3 - 45a^2$$

Opdracht 15.5 Laat door de oppervlaktes A_1, A_2, A_3 en A_4 en het totale oppervlak $A_1 + A_2 + A_3 + A_4$ te berekenen zien dat regel 15.2 waar is.



Opdracht 15.6 Werk de haakjes weg en vereenvoudig:

- $(3x^2 + 2)(x + 5) =$
- $(t - 3)(3t^4 + 4) =$
- $(2a^3 + 4)(3a^2 - 1) =$
- $(b^3 - 2b)(3b^4 - 3b^2) =$

Voorbeeld 15.5

Als er getallen of min tekens voor de haakjes staan, dan werk je de vorm in twee stappen uit:

- $3(x + 2)(x - 4) = 3(x^2 - 4x + 2x - 8) = 3x^2 - 12x + 6x - 24 = 3x^2 - 6x - 24$
- $-(x + 3)(x - 5) = -(x^2 - 5x + 3x - 15) = -x^2 + 5x - 3x + 15 = -x^2 + 2x + 15$

Opdracht 15.7 Werk de haakjes weg en vereenvoudig:

- $4(x - 1)(x - 3) =$
- $-(a + 2)(a + 4) =$
- $-2(c + 2)(c - 3) =$
- $2b(b - 1)(b - 6) =$

Opdracht 15.8 Werk de haakjes weg en vereenvoudig:

a. $(x + 2)(x + 4) - (x + 1)(x + 5) =$

b. $3(p + 1)(p + 3) - 2(p + 2)(p + 4) =$

c. $4y^2 - 3y(y + 1) - (y - 1)(y - 2) =$

d. $5a^2 - 2a(a - 3b) - 3(a - b)(a + 3b) =$

e. $4t^2 - 2t(t - 2) - 2(t + 3)(t - 1) =$

f. $(x - 1)(x - 2) - x(x - 3) =$

g. $(a + b)^2 - (a - b)^2 =$

Aanwijzing: $(a + b)^2 = (a + b)(a + b)$

h. $(m + 2)^2 - (m + 1)(m + 3) =$

i. $a(a + 1)(a + 2) - a^2(a + 3) =$

j. $(p + 1)(p + 2) + (p + 2)(p + 3) - 2(p + 2)^2 =$

