

9 Vergelijkingen met een onbekende

Een *veelterm* is een vorm die bestaat uit één of meer termen. Voorbeelden van veeltermen zijn: $2a$, $5p - 3q^2$ of 35 . Alleen maar één getal is ook een veelterm. Een *vergelijking* is een gelijkheid van twee veeltermen. Een voorbeeld van een vergelijking is: $x^2 - 3x = x - 3$. De hier genoemde vergelijking heet een *tweede graadsvergelijking*, omdat de hoogste macht van de onbekende 2 is. In dit hoofdstuk zullen we voornamelijk *eerste graadsvergelijkingen* bekijken, dus vergelijkingen waarbij de hoogste macht van de onbekende 1 is. Het *oplossen van een vergelijking* betekent het vinden van (een) waarde(n) voor de onbekende, waarvoor de vergelijking waar is.

Bij het oplossen van een eerste graadsvergelijking, wordt vaak gebruik gemaakt van de balansmethode.

Wat links van het = teken staat noem je het *linkerlid*.

Wat rechts van het = teken staat noem je het *rechterlid*.

Voorbeelden

$$3a + 5 = 26$$

$$5w + 7 = 4 - 8w$$

$$3x = 5x + 2x + 5$$

Wat is de balansmethode?

De balansmethode is eigenlijk maar één regel:



Doe aan beide kanten van het = teken dezelfde bewerking zodat je de onbekende variabele aan één kant overhoudt.

De naam balansmethode stamt af van de gedachte erachter: Een balans is een (oude) weegschaal met aan weerszijden een schaal. Op beide schalen leg je een gedeelte van de vergelijking. Het linkerlid op de linkerschaal en het rechterlid op de rechterschaal.

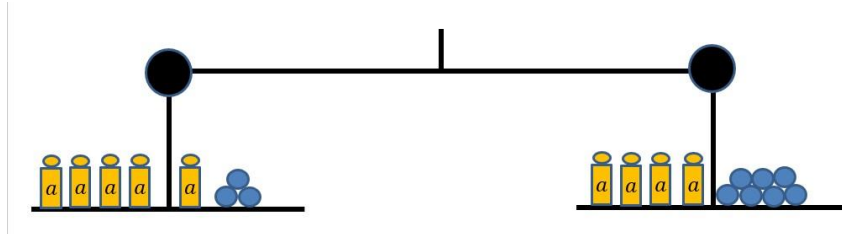
Nu ga je net zolang getallen er afhalen (of erbij doen) aan beide kanten totdat je je antwoord overhoudt.

Voorbeeld 9.1

Gegeven is de vergelijking $5a + 3 = 4a + 7$

Daar kun je de volgende balans bij bedenken.

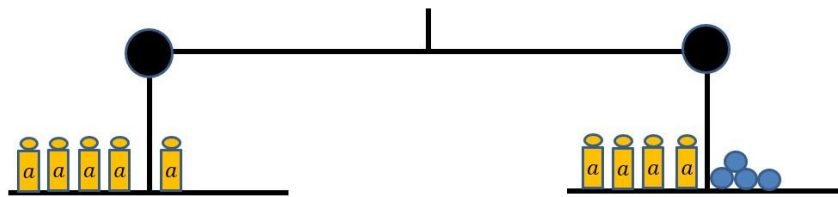
Voor a neem je zakjes met knikkers en voor de getallen losse knikkers.



Je ziet dat aan weerszijden knikkers liggen. Je kan aan allebei de kanten drie knikkers weghalen zonder dat de balans zijn evenwicht verliest.

Je krijgt dan:

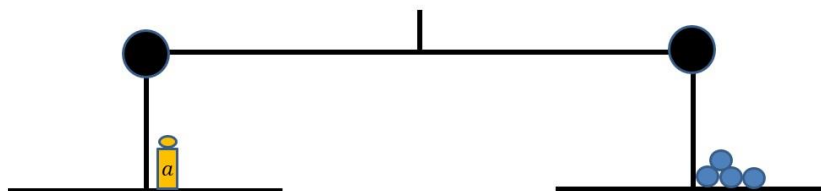
$$\begin{array}{rcl}
 5a + 3 & = & 4a + 7 \\
 -3 & & -3 \\
 \hline
 5a & = & 4a + 4
 \end{array}$$



Je kan ook aan beide kanten 4 zakjes knikkers weghalen zonder dat de balans zijn evenwicht verliest.

Je krijgt dan:

$$\begin{array}{rcl}
 5a & = & 4a + 4 \\
 -4a & & -4a \\
 \hline
 a & = & 4
 \end{array}$$



Oplossing: $a = 4$ (Er zitten dus 4 knikkers in een zakje)

Dit bovenstaande gebruik je bij alle vergelijkingen, en niet alleen lineaire vergelijkingen. Je hebt dit namelijk ook nodig bij andere soorten vergelijkingen.

Regel 9.1 Voor alle veeltermen a en b geldt:
 $a = b \Leftrightarrow b = a$

Toelichting:

1. Het symbool $\Leftrightarrow$ wordt uitgesproken als: *is gelijkwaardig aan*. Hier staan dus twee vergelijkingen die precies dezelfde oplossing(en) hebben.
2. De meeste mensen vinden het gemakkelijkst als de onbekende links van het '=' teken staat. Deze regel geeft aan hoe dat in zijn werk gaat: $2 = 4a + 3 \Leftrightarrow 4a + 3 = 2$.
3. We spreken in regel 12.1 over veeltermen, maar een veelterm mag natuurlijk ook alleen bestaan uit één getal.

Regel 9.2 Voor alle veeltermen a , b en p geldt:
 $a = b \Leftrightarrow a + p = b + p$

Toelichting:

1. Als twee veeltermen aan elkaar gelijk zijn en we tellen aan beide kanten van het '=' teken hetzelfde op, dan zijn de nieuwe veeltermen natuurlijk ook weer aan elkaar gelijk.
2. Met deze regel ben je in staat om optellingen en aftrekkingen in een veelterm ongedaan te maken. Zie ook voorbeeld 9.2.

Voorbeeld 9.2

1. We lossen de vergelijking: $x + 3 = 5$ op met de balansmethode:

$$\begin{array}{r} x + 3 = 5 \\ -3 \quad -3 \\ \hline \end{array}$$

$$x = 2$$

Als je in de oorspronkelijke vergelijking ($x + 3 = 5$) voor x de waarde 2 invult, dan zie je dat de vergelijking waar is. We noemen $x = 2$ een oplossing van de vergelijking.

2. We lossen de vergelijking: $7 = a - 4$ als volgt op:

$$\begin{array}{r} 7 = a - 4 \\ a - 4 = 7 \text{ (regel 9.1)} \\ +4 \quad +4 \\ \hline \end{array}$$

$$a = 11$$

Wiskundig gezien voer je bij het wegwerken van termen steeds regel 9.2 uit. Dit komt neer op de volgende gemakkelijk te onthouden werkwijze.



Als je een *term* naar de andere kant van het = teken brengt, dan wijzigt het teken van deze term.

Toelichting:

Je bereikt sneller het juiste eindresultaat als je het volgende doet:

$$\begin{array}{c} \begin{array}{l} \xrightarrow{-3a \text{ wordt } +3a} \\ x - 3a + 5b = -7a + 6b \\ \downarrow \\ +5b \text{ wordt } -5b \end{array} \quad \Leftrightarrow x = -7a + 6b + 3a - 5b \Leftrightarrow x = -4a + b \end{array}$$

Opdracht 9.1 Los x op uit:

- a. $x - 2 = 8$
- b. $x + 3 = 5$
- c. $x - 6 = 8$
- d. $x + 2 = -5$

Opdracht 9.2 Los t op uit:

- a. $t + 273 = 305$
- b. $t - 15 = 23$
- c. $t + 16 = 78$
- d. $t - 17 = -2$

Opdracht 9.3 Los x op uit:

- a. $x + 4 - 2 = 0$
- b. $x - 2 + 6 = 9$
- c. $x - 5 - 2 = 4$
- d. $x + 3 + 2 = 9$

Opdracht 9.4 Los x op uit:

- a. $x - 8 = 3$
- b. $25 = x + 6$
- c. $15 = x - 3$
- d. $x + 8 = 14$

Opdracht 9.5 Voor het omrekenen van een temperatuur t °C naar T K (Kelvin) maak je gebruik van de formule: $T = 273 + t$. Als $T = 350$ K bereken dan t (of los t op uit de gegeven vergelijking).

Voorbeeld 9.3

We gaan met letters werken:

1. We lossen x op uit de volgende vergelijking (p en q stellen getallen voor, waarvan we de waarde op dit moment niet kennen):

$$\begin{array}{rcl}
 x + p & = & q \\
 -p & & -p \\
 \hline
 x & = & q - p
 \end{array}$$

Omdat in dit stadium p en q nog onbekend zijn, kun je de vorm niet verder uitrekenen en is dit de oplossing van onze vergelijking.

2. We lossen x op uit de volgende vergelijking:

$$\begin{array}{rcl}
 x + 3a - 2b & = & 5c \\
 -3a & & = -3a \\
 \hline
 x - 2b & = & 5c - 3a \\
 +2b & & +2b \\
 \hline
 x & = & 5c - 3a + 2b
 \end{array}$$

3. We lossen x op uit de volgende vergelijking:

$$\begin{array}{rcl}
 x - 3a + 5b & = & -7a + 6b \\
 +3a & & +3a \\
 \hline
 x & +5b & = -4a + 6b \\
 & -5b & -5b \\
 \hline
 x & & = -4a + b
 \end{array}$$

Opdracht 9.6 Los x op uit:

- $x - a = b$
- $x + p = q$
- $x + s - t = 0$
- $x - 2a + 3b = 5c$

Opdracht 9.7 Los x op uit:

- $x + 2a = 7a$
- $x - 6b = 8b$
- $x + 5p - 2q = 7p + 3q$
- $x - 2a - 3b = 6a + 5b$

Opdracht 9.8 Los x op uit:

- $x - a^2 = b$
- $a + b = x + c$
- $x - 5c + 3d = 7e$
- $x + 2p - 3q = 5p - 6q$
- $x - \frac{a+b}{c} = 0$
- $x + 3a^2b = 5a^2b - 4ab^2$
- $x + 2(a-b)^7 = p$

Regel 9.3a Voor alle veeltermen a , b en k ($k \neq 0$) geldt:
 $a = b \Leftrightarrow a \cdot k = b \cdot k$

Regel 9.3b Voor alle veeltermen a , b en k ($k \neq 0$) geldt:
 $a = b \Leftrightarrow \frac{a}{k} = \frac{b}{k}$

Toelichting:

1. Als twee veeltermen aan elkaar gelijk zijn en je vermenigvuldigt of deelt aan beide kanten van het '=' teken met hetzelfde, dan zijn de nieuwe veeltermen natuurlijk ook weer aan elkaar gelijk.
2. Met deze regel ben je in staat om vermenigvuldigingen en delingen in een veelterm ongedaan te maken. Je vermenigvuldigt of deelt eenvoudig aan beide zijden van het '=' teken met hetzelfde van wat je wilt wegwerken. Zie voorbeeld 9.4.

Voorbeeld 9.4

1. We lossen x op uit de vergelijking: $5x = 20$, door aan beide kanten met 5 te delen.

$$5x = 20 \Leftrightarrow \frac{5x}{5} = \frac{20}{5} \Leftrightarrow x = 4$$

2. We lossen x op uit de vergelijking: $\frac{3x}{4} = 12$, door eerst aan beide kanten met 4 te vermenigvuldigen en daarna door 3 te delen.

$$\frac{3x}{4} = 12$$

$$\frac{3x \cdot 4}{4} = 12 \cdot 4$$

$$3x = 48$$

$$\frac{3x}{3} = \frac{48}{3}$$

$$x = 16$$

Wiskundig gezien voer je bij het wegwerken van factoren steeds regel 9.3a of 9.3b uit. Dit komt neer op de volgende gemakkelijk te onthouden werkwijze.



Als je een *factor* naar de andere kant van het = teken brengt, dan wijzigt de bewerking $\times$ in $:$, en de bewerking $:$ in $\times$.

Toelichting:

Je bereikt sneller het juiste eindresultaat als je het volgende doet:

$$\begin{array}{c} \text{ } \times 3 \text{ wordt } : 3 \\ \left[\begin{array}{l} \frac{3 \times x}{5} = 18 \end{array} \right. \quad \Leftrightarrow x = \frac{18 \times 5}{3} \Leftrightarrow x = 30 \\ \left. \begin{array}{l} : 5 \text{ wordt } \times 5 \end{array} \right] \end{array}$$

Opdracht 9.9 Los x op uit:

- a. $2x = 18$
- b. $3x = 24$
- c. $4x = 12$
- d. $5x = 20$

Opdracht 9.10 Los x op uit:

- a. $3x = 24$
- b. $\frac{2}{5}x = 6$
- c. $12 = 1\frac{1}{5}x$
- d. $\frac{4x}{5} = 20$

Opdracht 9.11 Los x op uit:

- a. $\frac{x}{4} = 7$
- b. $\frac{x}{3} = 5$
- c. $\frac{x}{2} = 8$
- d. $\frac{x}{3} = -2$

Opdracht 9.12 Los x op uit:

- a. $5x = 35$
- b. $\frac{x}{7} = 6$
- c. $\frac{2x}{5} = 8$

Met name als er links en rechts van het $=$ teken breuken staan, dan is regel 12.4 van grote waarde.

Regel 9.4 Voor alle veeltermen (dus ook getallen) a , b ($b \neq 0$), c en d ($d \neq 0$) geldt:

$$\frac{a}{b} = \frac{c}{d} \Leftrightarrow a \times d = b \times c$$

Toelichting:

- Deze stelling wordt ook wel het *kruislingsvermenigvuldigen* genoemd. Deze naam is

ontstaan door de wijze van vermenigvuldiging: $\frac{a}{b} \times \frac{c}{d}$.

- De waarheid van deze stelling is eenvoudig aan te tonen met behulp van regel 12.3.

$$\frac{a}{b} = \frac{c}{d} \Leftrightarrow bd \times \frac{a}{b} = bd \times \frac{c}{d} \Leftrightarrow \frac{abd}{b} = \frac{bcd}{d} \Leftrightarrow ad = bc \Leftrightarrow a \times d = b \times c$$

Voorbeeld 9.5

1. $\frac{2x}{5} = 1\frac{1}{3} \Leftrightarrow \frac{2x}{5} = \frac{4}{3} \Leftrightarrow 3 \times 2x = 4 \times 5 \Leftrightarrow 6x = 20 \Leftrightarrow x = \frac{20}{6} = 3\frac{2}{6} = 3\frac{1}{3}$
2. $\frac{x}{5} = 6 \Leftrightarrow \frac{x}{5} = \frac{6}{1} \Leftrightarrow 1 \times x = 5 \times 6 \Leftrightarrow x = 30$
3. $3x = 3\frac{1}{2} \Leftrightarrow \frac{3x}{1} = \frac{7}{2} \Leftrightarrow 2 \times 3x = 1 \times 7 \Leftrightarrow 6x = 7 \Leftrightarrow x = \frac{7}{6} = 1\frac{1}{6}$

Opdracht 9.13 Los x op uit:

- a. $\frac{2x}{3} = \frac{4}{12}$
- b. $\frac{3x}{4} = \frac{12}{8}$
- c. $\frac{x}{3} = 4\frac{5}{6}$
- d. $\frac{2x}{5} = 2\frac{2}{3}$

Opdracht 9.14 Bereken x met behulp van kruislingsvermenigvuldigen:

- a. $\frac{3x}{2} = 4\frac{1}{5}$
- b. $5x = 3\frac{2}{7}$
- c. $\frac{x}{4} = 2\frac{3}{8}$

Opdracht 9.15 Op een voorwerp werkt een kracht van $F = 50 \text{ N}$. Hierdoor krijgt het voorwerp een versnelling $a = 4 \text{ m/s}^2$. Met behulp van de formule $F = m \cdot a$ kun je nu de massa m in kg van het voorwerp berekenen. Vul de gegevens in en los m op.

Voorbeeld 9.6

We geven enkele voorbeelden met letters. Steeds wordt x berekend:

1. $\frac{ax}{b} = \frac{c}{d} \Leftrightarrow d \times ax = b \times c \Leftrightarrow ad \times x = bc \Leftrightarrow x = \frac{bc}{ad}$
2. $\frac{a^2bx}{cd} = \frac{a^3b^5}{c^3d^2} \Leftrightarrow c^3d^2 \times a^2bx = cd \times a^3b^5 \Leftrightarrow a^2bc^3d^2 \times x = a^3b^5cd \Leftrightarrow x = \frac{a^3b^5cd}{a^2bc^3d^2} = \frac{ab^4}{c^2d}$
3. $\frac{p^3qx}{r^3s^2} = \frac{rs^5}{p^5q^4} \Leftrightarrow p^5q^4 \times p^3qx = r^3s^2 \times rs^5 \Leftrightarrow p^8q^5 \times x = r^4s^7 \Leftrightarrow x = \frac{r^4s^7}{p^8q^5}$
4. $\frac{ax}{a+b} = \frac{p-q}{d} \Leftrightarrow d \times ax = (a+b) \times (p-q) \Leftrightarrow ad \times x = (a+b)(p-q) \Leftrightarrow x = \frac{(a+b)(p-q)}{ad}$

Zowel $a + b$ als ook $p - q$ worden als één groep beschouwd. Deze groepen zijn in hun geheel de factoren in onze vermenigvuldiging. Dit is de reden dan we (...) om deze groepen moeten zetten!

Opdracht 9.16 Los x op uit:

a. $\frac{x}{a} = \frac{b}{c}$

b. $\frac{ax}{b} = \frac{c}{d}$

c. $\frac{ax}{b} = \frac{b^3}{a^4}$

d. $\frac{a^2x}{b^3} = \frac{b^4}{a^6}$

Opdracht 9.17 Los x op uit:

a. $\frac{a^3x}{b^2} = \frac{a^5}{b^6}$

b. $\frac{p^4x}{q^3} = \frac{p^7}{q^5}$

c. $\frac{d^3x}{e^5} = \frac{d^7}{e^2}$

d. $\frac{g^8x}{h^2} = \frac{g^2}{h^7}$

Opdracht 9.18 Bereken x uit:

a. $\frac{c^3x}{d} = 3\frac{2}{5}$

b. $\frac{c^3d^5x}{p^4q^6} = \frac{c^2d^6}{p^2q^9}$

c. $\frac{a^3b^2x}{c^5d^7} = \frac{c^3d^2}{a^2b^5}$

d. $\frac{(a+b)x}{d} = \frac{p+q}{r}$

Regel 9.5 Voor alle veeltermen a , b , c en d (allen ongelijk aan 0) geldt:

$$\frac{a}{b} = \frac{c}{d} \Leftrightarrow \frac{b}{a} = \frac{d}{c}$$

Toelichting:Deze regel geeft aan dat je beide echte breuken links en rechts van het = teken mag *omdraaien*. Dit is met name gemakkelijk bij het oplossen van vergelijkingen van de vorm:

$$\frac{1}{x} = \frac{2}{5} \Leftrightarrow \frac{x}{1} = \frac{5}{2} \Leftrightarrow x = 2\frac{1}{2}.$$

Je mag met breuken allerlei manipulaties uitvoeren als het kruislingsproduct, links en rechts van het $\Leftrightarrow$ teken, maar steeds hetzelfde resultaat oplevert.

Toelichting:

Ga na dat geldt: $\frac{a}{b} = \frac{c}{d} \Leftrightarrow \frac{a}{c} = \frac{b}{d}$ en dat niet juist is: $\frac{a}{b} = \frac{c}{d} \Leftrightarrow \frac{a}{d} = \frac{b}{c}$

Opdracht 9.19 Voor een afgesloten hoeveelheid gas, waarbij de druk p constant blijft, geldt de wet van Gay Lussac. Deze heeft de volgende vorm: $\frac{V_1}{T_1} = \frac{V_2}{T_2}$. We verhitten zo'n gas met

een beginvolume $V_1 = 2,0 \cdot 10^{-3} \text{ m}^3$ en een temperatuur van $T_1 = 300 \text{ K}$ naar een eindtemperatuur $T_2 = 400 \text{ K}$. Vul de bovenstaande formule in en los op hoe groot het eindvolume V_2 wordt.

Opdracht 9.20 Over een weerstand R Ohm (Ω) staat een spanningsverschil van U Volt, hierdoor loopt een stroom I Ampère door de weerstand. De wet van Ohm vertelt ons hoe we dit moeten berekenen: $I = \frac{U}{R}$. Als $I = 0,2 \text{ A}$ en $U = 10 \text{ V}$ bereken dan de weerstand R .

☞ Dat *delen door nul zinloos* is kunnen we als volgt aantonen. Met behulp van kruislingsvermenigvuldigen is het duidelijk dat geldt: $\frac{a}{b} = c \Leftrightarrow a = b \times c$. Nu geldt:

- $\frac{1}{0} = c \Leftrightarrow 1 = 0 \times c$. Wat we ook voor c invullen $0 \times c = 0$ en kan *nooit* 1 worden.
- $\frac{0}{0} = c \Leftrightarrow 0 = 0 \times c$. Dit is *niet zinvol*, omdat elke waarde c hieraan voldoet.
- $\frac{0}{1} = c \Leftrightarrow 0 = 1 \times c$. Dit is wel mogelijk voor één waarde namelijk $c = 0$.

We gaan nu een onbekende oplossen in een vergelijking, waarin alle bewerkingen voorkomen.

Voorbeeld 9.7

- $3x + 9 = 30 \Leftrightarrow 3x = 30 - 9 \Leftrightarrow 3x = 21 \Leftrightarrow x = \frac{21}{3} = 7$
- $4x - 8 = 0 \Leftrightarrow 4x = 0 + 8 \Leftrightarrow 4x = 8 \Leftrightarrow x = \frac{8}{4} = 2$
- $3(x - 7) = 18 \Leftrightarrow x - 7 = \frac{18}{3} \Leftrightarrow x - 7 = 6 \Leftrightarrow x = 6 + 7 \Leftrightarrow x = 13$ Maar je kunt ook als eerste de haakjes uitvermenigvuldigen, zodat de oplossing er als volgt uit ziet:
 $3(x - 7) = 18 \Leftrightarrow 3 \times x - 3 \times 7 = 18 \Leftrightarrow 3x - 21 = 18 \Leftrightarrow 3x = 18 + 21 \Leftrightarrow 3x = 39 \Leftrightarrow x = \frac{39}{3} = 13$

De volgorde van het weghalen van factoren en termen kun je bepalen aan de hand van de volgende regel.

☞ De bewerking die je als *laatste* uitvoert, dien je als *eerste* weg te werken (ongedaan te maken).

Toelichting:

1. Als vóór het = teken staat: $3x + 9$ en je wilt dit voor een zekere x waarde (bijvoorbeeld: $x = 5$) uitrekenen, dan ga je *als eerste vermenigvuldigen en als laatste optellen*. Dus start éérst met het weghalen van de '+ 9', waarna je overhoudt $3x = \dots$. Daarna haal je pas de '3x' weg. Je houdt nu over: $x = \dots$.
2. Als vóór het = teken staat: $8(x + 2)$ en je wilt dit voor een zekere x waarde (bijvoorbeeld: $x = 5$) uitrekenen, dan ga je *als eerste optellen binnen de haakjes en als laatste vermenigvuldigen*. Dus start éérst met het weghalen van de '8x', waarna je overhoudt $x + 2 = \dots$. Daarna haal je pas de '+ 2' weg. Je houdt nu over: $x = \dots$.
3. Als vóór het = teken staat: $6(3x + 7)$ en je wilt dit voor een zekere x waarde (bijvoorbeeld: $x = 5$) uitrekenen, dan ga je *als eerste vermenigvuldigen (3x), daarna ga je optellen (+ 7) en als laatste ga je vermenigvuldigen (6x)*. Dus start éérst met het weghalen van de '6x', waarna je overhoudt $3x + 7 = \dots$. Vervolgens halen we de '+ 7' weg. Je houdt nu over: $3x = \dots$. Daarna kun je pas de '3x' weghalen. Je houdt nu over: $x = \dots$.

Opdracht 9.21 Los x op uit:

- a. $2x + 7 = 13$
- b. $3x + 9 = 6$
- c. $4x - 3 = 5$
- d. $5x - 6 = 9$

Opdracht 9.22 Los x op uit:

- a. $3 + 4x = 11$
- b. $7 - 2x = -3$
- c. $5 + 4x = 25$
- d. $18 - 3x = 3$

Opdracht 9.23 Los de onbekende letter op uit:

- a. $2 \cdot I = 120$
- b. $m \cdot 3 = 21$
- c. $V \cdot 2 = 24$
- d. $p \cdot 4 = 28$

Opdracht 9.24 Los de onbekende letter op uit:

- a. $37 = 25 + 4 \cdot t$
- b. $24 = 16 + 2 \cdot b$
- c. $36 = 15 + a \cdot 7$
- d. $46 = -2 + v \cdot 8$

Opdracht 9.25 Los x op uit:

- a. $2(x - 3) = 4$
- b. $3(x + 5) = 27$
- c. $4(x - 5) = 12$
- d. $5(x + 6) = 20$

Opdracht 9.26 Los x op uit:

a. $\frac{x-3}{4} = 5$

b. $\frac{x+2}{8} = 7$

c. $\frac{x-4}{3} = 9$

d. $\frac{x+6}{5} = 6$

Opdracht 9.27 Bereken x uit:

a. $4x - 6 = 22$

b. $5x + 3 = 48$

c. $2(x - 1) = 20$

d. $\frac{x-5}{3} = 15$

e. $5(3x + 6) = 45$

f. $4(7x - 5) + 3 = 39$

g. $\frac{5x-3}{6} = 2$

Opdracht 9.28 Voor een eenparig versnelde beweging geldt de formule: $v_t = v_0 + a \cdot t$. Voor een zekere eenparig versnelde beweging geldt: $v_t = 20 \text{ m/s}$, $v_0 = 6 \text{ m/s}$ en $a = 2 \text{ m/s}^2$. Vul deze gegevens in de bovenstaande formule in en bereken het tijdstip t in s. (Dus los t op)

Opdracht 9.29 De druk p in een vloeistofkolom, met een soortelijke massa ρ , kan men berekenen via de formule: $p = \rho \cdot g \cdot h$. Wat is de hoogte h (in meter) van een kwikkolom $\rho = 13,6 \cdot 10^3 \text{ kg/m}^3$ als de druk $p = 1 \text{ bar} \hat{=} 10^5 \text{ N/m}^2$ en $g = 9,8 \text{ m/s}^2$. (Dus los h op).

Opdracht 9.30 Gegeven is een weerstand $R = 47 \Omega$ en een spanningsverschil over de weerstand $U = 5,0 \text{ V}$.

a. Bereken de stroomsterkte I (eenheid: A) welke door de weerstand gaat (formule: $U = I \cdot R$)

b. Bereken het vermogen P (eenheid: W) van de weerstand (formule: $I = \frac{P}{U}$)

Je gaat vergelijkingen oplossen, waarin zowel voor als achter het = teken onbekenden staan.

Voorbeeld 9.8

- Als gegeven is: $5x - 8 = 3x + 6$, dan ga je als volgt te werk: je brengt alle termen, waarin de letter x staat vóór het = teken en alle termen zonder de letter x achter het is teken. Zie ook de werkwijze die beschreven is bij regel 9.2. Zo vind je:
 $5x - 8 = 3x + 6 \Leftrightarrow 5x - 3x = 6 + 8$. Je kunt nu de x waarden en de getallen optellen. Waarna het oplossen op de vertrouwde manier verder gaat. Dus:

$$5x - 3x = 6 + 8 \Leftrightarrow 2x = 14 \Leftrightarrow x = \frac{14}{2} = 7.$$

2. Als gegeven is: $2x + 5 = -(3x + 10)$, dan werk je éérs de haakjes weg. De oplossing gaat als:

$$2x + 5 = -(3x + 10) \Leftrightarrow 2x + 5 = -3x - 10 \Leftrightarrow 2x + 3x = -10 - 5 \Leftrightarrow 5x = -15 \Leftrightarrow x = \frac{-15}{5} = -3$$

3. Nu in het algemeen: $ax + b = cx + d \Leftrightarrow ax - cx = d - b \Leftrightarrow (a - c)x = d - b \Leftrightarrow x = \frac{d - b}{a - c}$.

(Voor het buiten haakjes halen van de x , zie ook regel 6.4)

Opdracht 9.31 Los x op uit:

- a. $3(2x - 4) = 18$
- b. $5(3x + 8) = 10$
- c. $4(5x - 6) - 2 = 34$
- d. $2(7x - 13) + 5 = 35$

Opdracht 9.32 Los x op uit:

- a. $4x - 3 = 3x + 2$
- b. $5x + 7 = 2x + 13$
- c. $6x - 3 = -2x + 21$
- d. $7x - 20 = -x + 12$

Opdracht 9.33 Los x op uit:

- a. $4x - 9 = -3x + 5$
- b. $5x + 8 = -(-3x + 24)$
- c. $2x + 9 = 5x + 15$

Opdracht 9.34 Los t op uit:

- a. $80(t - 20) = 160$
- b. $5(80 - t) = 35$

Opdracht 9.35 Los x op door eerst de haakjes uit te werken:

- a. $5(x + 2) + 2(x - 1) = 29$
- b. $3(2x - 1) + 3(x + 2) = 48$
- c. $4(3x + 2) - 2(x + 3) = 42$
- d. $2(5x - 8) - 3(2x + 4) = -4$

Opdracht 9.36 Los t op door eerst de haakjes uit te werken (antwoord afronden op één decimaal nauwkeurig):

$$80 \times (t - 15) + 1260 \times (t - 15) = 900 \times (75 - t)$$

Opdracht 9.37 In een calorimeter met een warmtecapaciteit van $C = 80 \text{ J/K}$ zit 200 g water met een temperatuur van 20°C . In deze calorimeter met water werpt men een blokje ijzer met een massa van 10 g en een temperatuur van 80°C . Als je weet dat de soortelijke warmte van water $c = 4200 \text{ J/(kg}\cdot\text{K)}$ en die van ijzer $c = 500 \text{ J/(kg}\cdot\text{K)}$ is, bereken dan de eindtemperatuur na enige tijd.

De oplossing gaat als volgt. Stel de gevraagde eindtemperatuur is $t^\circ\text{C}$. We kunnen nu de volgende vergelijking opstellen:

$$\Delta Q_{\text{opgenomen}} = \Delta Q_{\text{afgegaan}} \Leftrightarrow$$

$$C \cdot \Delta t_{\text{opgenomen}} + m_{\text{water}} \cdot c_{\text{water}} \cdot \Delta t_{\text{opgenomen}} = m_{\text{ijzer}} \cdot c_{\text{ijzer}} \cdot \Delta t_{\text{afgegaan}} \Leftrightarrow$$

$$80 \times (t - 20) + 0,2 \times 4200 \times (t - 20) = 0,01 \times 500 \times (80 - t)$$

Vermenigvuldig in de bovenstaande vergelijking éérs de getallen voor de haakjes met elkaar en werk daarna de haakjes weg. Los vervolgens t op. (De eindtemperatuur afronden op 1 decimaal nauwkeurig)

Kwadraten en wortels werk je met de volgende regel weg.

Regel 9.6 Voor alle termen a en b ($b \geq 0$) geldt:

$$a^2 = b \Leftrightarrow a = \pm\sqrt{b}$$

Toelichting:

1. We geven aan dat b groter of gelijk aan nul moet zijn, omdat je alleen maar de wortel kunt nemen van deze getallen. Natuurlijk geldt ook een kwadraat (a^2) is altijd groter of gelijk aan nul.
2. Het symbool $\pm$ (spreek uit: *plus of min*) betekent dat je op deze plaats een $+$ en ook een $-$ teken mag schrijven. Het is dus niet het symbool voor: ‘plusminus’, wat in het Nederlands ‘ongeveer’ betekend. In de wiskunde gebruiken we het symbool $\approx$ voor ongeveer gelijk aan.
3. Omdat de uitkomst van $\sqrt{b} \geq 0$ plaatsen we het $\pm$ symbool voor $\sqrt{b}$. Op deze wijze zijn we ook in staat om negatieve oplossingen te krijgen.

Bij het oplossen van formules wordt regel 9.6 meestal gebruikt als:

Regel 9.7 $\sqrt{x} = a \Leftrightarrow x = a^2 \quad (a \geq 0)$

$$x^2 = a \Leftrightarrow x = \pm\sqrt{a} \quad (a \geq 0)$$

Voorbeeld 9.9

1. $x^2 = 9 \Leftrightarrow x = \pm\sqrt{9} \Leftrightarrow x = \pm 3 \Leftrightarrow x = 3 \vee x = -3$. Dit zijn juiste oplossingen, want: $(3)^2 = 9$ en ook $(-3)^2 = 9$. Het symbool $\vee$ wordt in de wiskunde als: ‘of’ uitgesproken.
2. $\sqrt{2x} = 3 \Leftrightarrow 2x = 3^2 \Leftrightarrow x = \frac{9}{2} = 4\frac{1}{2}$
3. $-\sqrt{x} = -5 \Leftrightarrow (-\sqrt{x})^2 = (-5)^2 \Leftrightarrow x = 25$
4. $3x^2 + 4 = 79 \Leftrightarrow 3x^2 = 79 - 4 \Leftrightarrow x^2 = \frac{75}{3} \Leftrightarrow x = \pm\sqrt{25} \Leftrightarrow x = \pm 5 \Leftrightarrow x = 5 \vee x = -5$
5. $(\frac{1}{2}x)^2 - 4 = 5 \Leftrightarrow (\frac{1}{2}x)^2 = 5 + 4 \Leftrightarrow (\frac{1}{2}x)^2 = 9 \Leftrightarrow \frac{1}{2}x = \pm\sqrt{9} \Leftrightarrow \frac{1}{2}x = \pm 3 \Leftrightarrow x = 2 \times \pm 3 = \pm 6$
 $\Leftrightarrow x = +6 \vee x = -6$

Opdracht 9.38 Los x op uit:

- a. $x^2 - 3 = 33$
- b. $2x^2 + 7 = 25$
- c. $3x^2 - 13 = 35$
- d. $5x^2 + 3 = 23$

Opdracht 9.39 Los x op uit:

- $\sqrt{x-2} = 4$
- $\sqrt{x+3} = 5$
- $\sqrt{2x-4} = 6$
- $\sqrt{3x+6} = 9$

Opdracht 9.40 Los x op uit:

- $(2x-4)^2 + 8 = 12$
- $(2x+3)^2 - 18 = 7$
- $2(x-3)^2 - 8 = 24$
- $3(2x-7)^2 + 6 = 33$

Opdracht 9.41 Los x op uit:

- $x^2 = 81$
- $\sqrt{5x-9} = 4$
- $2x^2 - 6 = 66$
- $(2x-1)^2 + 2 = 18$

Opdracht 9.42 Als je een voorwerp vanaf een hoogte h_0 omlaag laat vallen, dan kun je de hoogte h_t op een willekeurig tijdstip t berekenen met de formule: $h_t = h_0 + \frac{1}{2}gt^2$. Stel de beginhoogte is $h_0 = 100$ m, en neem voor $g = -10$ m/s². Op welk tijdstip t is $h_t = 55$ m? (Let op: voort het tijdstip t geldt: $t \geq 0$, immers $t < 0$ betekent: vóóordat de beweging begon!)

Opdracht 9.43 Voor een slinger met de lengte l kun je de slingertijd T bepalen via de formule: $T = 2\pi\sqrt{\frac{l}{g}}$, mits de uitwijking van de slinger niet te groot is. Bepaal met behulp van je rekenmachine hoe groot de lengte l van de slinger moet zijn, om een trillingstijd $T = 2$ s te krijgen. (Neem voor $g = +9,81$ m/s² en let goed op de *volgorde* van het wegwerken!)

Je hebt nu voldoende theorie gehad om meteen een nieuwe techniek toe te passen. Met hetgeen we in dit hoofdstuk hebben geleerd kun je zonder problemen veel ‘*formules omvormen*’ of zoals het in de wiskunde wordt gezegd: ‘*variabelen isoleren*’. We doen net als of we een vergelijking aan het oplossen zijn.

Voorbeeld 9.10

1. Isoleer a uit de formule, wil zeggen schrijf de formule op als: $a = \dots$ (los a op uit $\dots$)

Isoleer a uit: $F = m \cdot a$. Dit gaat als volgt: $F = m \cdot a \Leftrightarrow m \cdot a = F \Leftrightarrow a = \frac{F}{m}$

2. Isoleer R uit: $I = \frac{U}{R}$. Dit gaat als volgt: $I = \frac{U}{R} \Leftrightarrow I \cdot R = U \Leftrightarrow R = \frac{U}{I}$

3. Isoleer t uit: $s = \frac{1}{2}at^2$. Dit gaat als volgt:

$$s = \frac{1}{2}at^2 \Leftrightarrow s = \frac{at^2}{2} \Leftrightarrow 2s = at^2 \Leftrightarrow at^2 = 2s \Leftrightarrow t^2 = \frac{2s}{a} \Leftrightarrow t = \pm\sqrt{\frac{2s}{a}}$$

4. Isoleer a uit: $v_t = v_0 + at$. Dit gaat als volgt:

$$v_t = v_0 + at \Leftrightarrow v_0 + at = v_t \Leftrightarrow at = v_t - v_0 \Leftrightarrow a = \frac{v_t - v_0}{t}$$

5. Isoleer γ uit: $V_t = V_0 + V_0 \cdot \gamma \cdot \Delta T$. Dit gaat als volgt:

$$V_0 + V_0 \cdot \gamma \cdot \Delta T = V_t \Leftrightarrow V_0 \cdot \gamma \cdot \Delta T = V_t - V_0 \Leftrightarrow \gamma = \frac{V_t - V_0}{V_0 \cdot \Delta T}$$

Opdracht 9.44

- Isoleer m uit: $\Delta Q = m \cdot c \cdot \Delta T$
- Isoleer p_2 uit: $\frac{p_1}{T_1} = \frac{p_2}{T_2}$
- Isoleer t uit: $s_t = s_0 + v \cdot t$
- Isoleer V uit: $I = \frac{V}{R}$
- Isoleer I uit: $P = I^2 \cdot R$
- Isoleer ω uit: $a_c = \omega^2 \cdot r$
- Isoleer T uit: $\omega = \frac{2\pi}{T}$
- Isoleer ΔT uit: $V_t = V_0 + V_0 \cdot \gamma \cdot \Delta T$
- Isoleer m uit: $T = 2\pi \sqrt{\frac{m}{C}}$

Opdracht 9.45

- Isoleer c uit: $\Delta Q = m \cdot c \cdot \Delta T$
- Isoleer V_2 uit: $\frac{V_1}{T_1} = \frac{V_2}{T_2}$
- Isoleer k uit: $\Phi = k \cdot A \cdot \Delta T$
- Isoleer v uit: $s_t = s_0 + v \cdot t$
- Isoleer r uit: $A = \pi \cdot r^2 \quad (r \geq 0)$
- Isoleer t uit: $v_t = v_0 + a \cdot t$
- Isoleer α uit: $l_t = l_0 + l_0 \cdot \alpha \cdot \Delta t$

Opdracht 9.46 Als we twee weerstanden R_1 en R_2 parallel schakelen, dan kunnen we de vervangingsweerstand berekenen via: $\frac{1}{R_v} = \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2}$. Herschrijf de formule tot $R_v = \dots$

(Aanwijzing: maak van $\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2}$ eerst één echte breuk.)

Algemene opdrachten

Opdracht 9.47 Als een gas een toestandsverandering ondergaat, dan kunnen we de algemene gaswet hierop toepassen. Deze algemene gaswet luidt: $\frac{p_1 \times V_1}{T_1} = \frac{p_2 \times V_2}{T_2}$. In deze formule stelt p de druk, V het volume en T de temperatuur (in K) van het gas voor. Voor een bepaald gas geldt: $p_1 = 0,7 \cdot 10^5$ Pa, $V_1 = 0,58 \cdot 10^{-3}$ m³, $T_1 = 294$ K, $p_2 = 1,3 \cdot 10^5$ Pa en $V_2 = 0,92 \cdot 10^{-3}$ m³. Bereken met behulp van de algemene gaswet T_2 .

Opdracht 9.48 De centripetale kracht kunnen we berekenen met behulp van de formule:

$F_c = \frac{mv^2}{r}$. In deze formule is F_c de centripetale kracht, m de massa, v de baansnelheid en r de straal van het ronddraaiende voorwerp. Bereken de baansnelheid v (in m/s) als gegeven is: $F_c = 25,3$ N, $m = 0,29$ kg en $r = 0,63$ m.

Opdracht 9.49 De lenzenformule luidt: $\frac{1}{f} = \frac{1}{v} + \frac{1}{b}$, hierin stelt f de brandpuntsafstand, v de voorwerpsafstand en b de beeldpuntafstand voor. Ook is gegeven: $f = 2,5$ cm en $v = 4,1$ cm.

- Vul de gegeven waarden in de lenzenformule in en isoleer daarna: $\frac{1}{b}$
- Bereken vervolgens hoe groot b is.

Opdracht 9.50 De inhoud V van een kubus met een zijde a wordt berekend met de formule: $V = a^3$. Hoe groot moet de zijde a gekozen worden, zodat het volume $V = 3,5$ cm³.

Opdracht 9.51 De inhoud V van een bol met een straal r wordt berekend met de formule: $V = \frac{4}{3} \pi r^3$. Hoe groot moet de straal r gekozen worden, zodat het volume $V = 2,6 \cdot 10^{-4}$ cm³.

Opdracht 9.52 Een conservenblik met een inhoud van 1 liter heeft een diameter van 10 cm. Bereken de hoogte h van dit conservenblik. (antwoord in 1 decimaal nauwkeurig geven)

Opdracht 9.53 Een bekeerglas heeft een diameter van 6 cm. Als je 150 ml vloeistof in dit bekeerglas giet, hoe hoog staat dan het vloeistofniveau? (Afronden op cm nauwkeurig)

Opdracht 9.54 Een koperen elektriciteitsdraad heeft een doorsnede (oppervlak waar je tegen aan kijkt) van 25 mm².

- Wat is de diameter van de draad?
- Hoeveel koper heeft men nodig om 150 m van deze draad te maken?
- Wat is de massa van deze draad? (Maak gebruik van de formule: $\rho = \frac{m}{V}$ en het gegeven:

$$\rho_{\text{Cu}} = 8,96 \cdot 10^3 \text{ kg/m}^3$$

Ingeklede vergelijkingen

Bij ingeklede of tekst vergelijkingen stel je hetgeen berekend moet worden gelijk aan een variabele. Hierna maak je met behulp van de tekst de formules, waarna je de variabele oplost.

Voorbeeld 9.11

Iemand zegt: “Driemaal een getal plus acht levert zesentwintig. Wat is het getal?”

Om achter het getal te komen kun je het beste met letters gaan werken. Noem het onbekende getal x . Er is gezegd: “Driemaal een getal” dit vertaal je als: $3 \times x$ oftewel: $3x$.

Zo ontstaat de volgende vergelijking: $3x + 8 = 26$. Deze is eenvoudig op te lossen met hetgeen je in dit hoofdstuk hebt geleerd:

$$3x + 8 = 26 \Leftrightarrow 3x = 26 - 8 = 18 \Leftrightarrow x = \frac{18}{3} = 6. \text{ Dus het getal is: } 6.$$

Voorbeeld 9.12

Iemand koopt 15 kg spijkers en 1 kg schroeven. 1 kg schroeven kost $2\frac{1}{2}$ maal zoveel als 1 kg spijkers. In totaal wordt € 87,50 betaald. Wat kost 1 kg spijkers?

De oplossing gaat als volgt:

Stel 1 kg spijkers kost: x euro, dan kost 1 kg schroeven $2\frac{1}{2}x$ euro. Voor 15 kg spijkers moet hij $15 \times x$ euro betalen en voor 1 kg schroeven: $1 \times 2\frac{1}{2}x$ euro. In totaal betaalt hij op deze wijze: $15x + 2\frac{1}{2}x = 17\frac{1}{2}x$ en dit is gelijk aan 87,50. Hieruit volgt:

$$17\frac{1}{2}x = 87,5 \Leftrightarrow x = \frac{87,5}{17,5} = 5. \text{ 1 kg spijkers kost dus: € 5,00}$$

Opdracht 9.55 De weg van A, via B en C, naar D is 90 km. De afstand tussen B en C is vijf maal en tussen C en D vier maal de afstand AB. Bereken de afstand AB.

Aanwijzing: noem de afstand AB = x , wat is dan BC en CD uitgedrukt in x ? Tel de afstanden (uitgedrukt in x) op en deze waarde is gelijk aan 90.

Opdracht 9.56 Jan, Piet en Klaas hebben samen € 270,00 ontvangen. Piet kreeg het dubbele van Jan en Klaas kreeg € 30,00 minder dan Piet. Wat kreeg ieder?

Opdracht 9.57 Als men bij de helft van een bedrag € 30,00 optelt, krijgt men hetzelfde als men drie maal het bedrag neemt en dit vermindert met € 320,00. Bereken het bedrag.

Opdracht 9.58 Een vader is 40 jaar oud. Zijn zoon is 15 jaar. Na hoeveel jaar is de vader twee maal zo oud als zijn zoon?