

12 Worteltrekken

In het hoofdstuk 1 ben je bij het gebruik van de stelling van Pythagoras al de bewerking *worteltrekken* tegengekomen. In dit hoofdstuk ga je dieper in op deze bewerking.

Vierkantswortels

Afspraak 12.1 Voor alle getallen $a \geq 0$ en $b \geq 0$ geldt:
 $\sqrt{a} = b \Leftrightarrow b^2 = a$

Toelichting:

1. De vierkantswortel van 9 (notatie: $\sqrt{9}$) is gelijk aan: 3, want $3^2 = 9$. De vierkantswortel van negen, wordt meestal afgekort tot: *de wortel van negen*, of zelfs tot: *wortel negen*.
2. De vierkantswortel van een getal is volgens onze afspraak (“per definitie”) altijd groter of gelijk aan nul. Dus: $\sqrt{9}$ is **altijd** +3 en **nooit** -3! Verwar dit niet met: “de wortels (lees: oplossingen) van de vergelijking: $x^2 = 9$ zijn $x = +3$ of $x = -3$ ”.
3. Een gevolg van onze afspraak is dat: $\sqrt{(-2)^2} = \sqrt{4} = +2$.
4. Resumerend: onder de vierkantswortel mag nooit een negatief getal staan (binnen de getalverzameling $\mathbb{R}$) en de uitkomst van een vierkantswortel is nooit negatief.
5. Het woord “*wortel*” heeft in de wiskunde (jammer genoeg) een dubbele betekenis:
 -  Wortel kan betekenen: *vierkantswortel*. Je vindt het antwoord nadat je de bewerking worteltrekken hebt uitgevoerd.
 -  Wortel kan betekenen: *de oplossing van een vergelijking*.
 -  Begrijp je de volgende zin: “Je ziet de wortels bevatten wortels. Om de wortels te vinden moet je nog de wortel nemen”?
 Het is beter om de zin dan volgt te formuleren: “Je ziet de wortels van de vergelijking bevatten vierkantswortels. Om de oplossingen te bepalen moet je nog de bewerking worteltrekken uitvoeren”.
6. Merk hier nogmaals op dat worteltrekken en machtsverheffen bewerkingen zijn welke elkaar ongedaan kunnen maken. Zie in dit verband ook hoofdstuk 12.

De volgende tabel met *zuivere kwadraten* is van belang, omdat de wortel van een zuiver kwadraat een geheel getal oplevert.

Zuivere kwadraten	1^2	2^2	3^2	4^2	5^2	6^2	7^2	8^2	9^2	10^2
	1	4	9	16	25	36	49	64	81	100

Het is niet moeilijk om de geldigheid van regel 12.1 in te zien.

Regel 12.1 Voor alle getallen $a \geq 0$ geldt:

$$\sqrt{a^2} = a$$

$$(\sqrt{a})^2 = a$$

Toelichting:

Let op *de volgorde* hoe de bewerkingen worden uitgevoerd.

In de eerste regel bepaal je eerst het kwadraat van a , dit is: a^2 en van het resultaat neem je de vierkantswortel, dit is: $\sqrt{a^2}$.

In de tweede regel bepaal je eerst de vierkantswortel van a , dit is: $\sqrt{a}$ en van het resultaat neem je het kwadraat, dit is: $(\sqrt{a})^2$.

Voorbeeld 12.1

1. $\sqrt{2^2} = 2$

$\sqrt{0^2} = 0$

$\sqrt{7^2} = 7$

2. $(\sqrt{2})^2 = 2$

$(\sqrt{0})^2 = 0$

$(\sqrt{7})^2 = 7$

Opdracht 12.1 Maak eerst van de getallen onder het wortelteken een zuiver kwadraat en reken daarna uit:

a. $\sqrt{25} =$

b. $\sqrt{100} =$

c. $\sqrt{36} =$

Opdracht 12.2 Splits eerst op in factoren van de volgende vorm: $(\dots)^2$ en reken daarna uit:

a. $(\sqrt{3})^6 = (\sqrt{3})^2 \times (\sqrt{3})^2 \times (\sqrt{3})^2 =$

b. $(\sqrt{5})^8 =$

c. $(\sqrt{7})^4 =$

Als je voor letters **alle** getallen a wilt gebruiken, dan wordt regel 12.1 herschreven tot regel 12.2.

Regel 12.2 Voor alle getallen $a \in \mathbb{R}$ geldt:

$$\sqrt{a^2} = |a|$$

Toelichting:

- $|a|$ wordt *de absolute waarde van a* genoemd. De absolute waarde zorgt dat elk getal, ongelijk aan nul, positief wordt. De functie werkt als volgt: $a = -4 \Rightarrow |a| = |-4| = +4$,
 $a = 2 \Rightarrow |a| = |2| = 2$ en $a = 0 \Rightarrow |a| = |0| = 0$.

- Populair gezegd: “*de absolute waarde verwijdert de mintekens*”.

- Als $a = -3$ dan geldt volgens de bovenstaande regel: $\sqrt{(-3)^2} = |-3| = +3$



Om te voorkomen dat we voortdurend met de functie absolute waarde moeten werken gaan we in de rest van dit hoofdstuk ervan uit dat alle letters *positieve getallen* voorstellen. Als we hier van afwijken, dan vermelden we dat uitdrukkelijk!

Regel 12.3 Voor alle getallen $a \geq 0$ en $b \geq 0$ geldt:

$$\sqrt{a} \times \sqrt{b} = \sqrt{a \times b}$$

Toelichting:

- $\sqrt{a \times b}$ is een verkorte schrijfwijze voor: $\sqrt{a \times b}$ en $\sqrt{a}$ betekent: $\sqrt{a}$. De lengte van het streepje is van groot belang bij het opschrijven van de wortel!
- In het algemeen geldt: $\sqrt{a \times b} \neq \sqrt{a} \times b$. Voor het = teken berekenen we eerst het product van de getallen a en b , en van de uitkomst nemen we de wortel. Achter het = teken nemen we eerst de wortel van a en deze uitkomst vermenigvuldigen we met b (Prioriteiten regel!). We laten in een rekenvoorbeeld zien, dat de twee uitkomsten kunnen verschillend zijn:

$$\sqrt{4 \times 9} \neq \sqrt{4} \times 9$$

$$\sqrt{36} \neq \sqrt{2^2} \times 9$$

$$\sqrt{6^2} \neq 2 \times 9$$

$$6 \neq 18$$
- Om problemen zoals in punt 1 te omzeilen schrijven we **nooit**: $\sqrt{a} \times b$, dit wordt altijd geschreven als: $b \times \sqrt{a} = b \cdot \sqrt{a} = b\sqrt{a}$. Dus altijd eerst het plus of min teken, gevolgd door “de gewone getallen en letters” en daarna pas de wortelvorm.
- Op dezelfde wijze, zoals we in regel 6.3 hebben beschreven, betekent:

$$5\sqrt{a} = 5 \times \sqrt{a} = \underbrace{\sqrt{a} + \sqrt{a} + \sqrt{a} + \sqrt{a} + \sqrt{a}}_{\text{komt 5 maal voor}}$$

Voorbeeld 12.2

Breng alles onder één wortelteken:

- $\sqrt{5} \times \sqrt{7} = \sqrt{5 \times 7} = \sqrt{35}$
- $\sqrt{3} \times \sqrt{a} \times \sqrt{x} = \sqrt{3 \times a \times x} = \sqrt{3ax}$
- $4\sqrt{p} = 4 \times \sqrt{p} = \sqrt{4^2} \times \sqrt{p} = \sqrt{16} \times \sqrt{p} = \sqrt{16 \times p} = \sqrt{16p}$

Opdracht 12.3 Breng alles onder één wortelteken:

- $\sqrt{3} \times \sqrt{11} =$
- $\sqrt{2} \times \sqrt{5} \times \sqrt{p} \times \sqrt{q} =$
- $5\sqrt{a} =$



We schrijven wortels altijd zo eenvoudig mogelijk. “Zuivere kwadraten brengen we altijd voor het wortelteken”. Dit kunnen getallen maar ook letters zijn. We noemen dit ook wel: we brengen zoveel mogelijk factoren buiten de wortel.

Toelichting:

Hiermee bedoelen we: door het toepassen van de regels 12.1 en 12.3 maak je de wortelvorm zo klein mogelijk.

Voorbeeld 12.3

1. $\sqrt{36a} = \sqrt{36} \times \sqrt{a} = \sqrt{6^2} \times \sqrt{a} = 6 \times \sqrt{a} = 6\sqrt{a}$
2. $\sqrt{16x^2y^4z} = \sqrt{16} \times \sqrt{x^2} \times \sqrt{y^4} \times \sqrt{z} = 4 \times x \times y^2 \times \sqrt{z} = 4xy^2\sqrt{z}$
3. $\sqrt{64p^3q^7} = \sqrt{64} \times \sqrt{p^2} \times \sqrt{p} \times \sqrt{q^2} \times \sqrt{q^2} \times \sqrt{q^2} \times \sqrt{q}$
 $= 8 \times p \times q \times q \times q \times \sqrt{p} \times \sqrt{q} = 8pq^3\sqrt{pq}$
4. Let op de uitwerking van de vermenigvuldiging. We vermenigvuldigen:
 - alle getallen met elkaar,
 - alle “gewone letters” met elkaar,
 - alle wortelvormen met elkaar.

Opdracht 12.4 Vereenvoudig de volgende wortels zoveel mogelijk:

- a. $\sqrt{9bc} =$
- b. $\sqrt{25a^2b^3} =$
- c. $\sqrt{16a^6b^4c} =$
- d. $\sqrt{9x^9y^9} =$
- e. $\sqrt{81p^7q^6} =$
- f. $\sqrt{49a^5b^2c^3} =$

Om de zuivere kwadraten uit factoren, welke alleen uit letters bestaan te halen is vrij eenvoudig. Bij getallen gaan we eerst het getal opsplitsen in de zogenaamde priemfactoren.



Een *priemgetal* is een positief geheel getal, dat *precies twee delers* bezit. Deze delers zijn 1 en het getal zelf.

Toelichting:

1. We noemen het getal b een deler van het getal a , als $a : b$ een geheel getal oplevert zonder rest.
2. Voorbeelden van priemgetallen zijn: 2, 3, 5, 7, 11, 13, ... Ga na dat deze getallen precies twee delers hebben.
3. Geen voorbeelden van priemgetallen zijn: 1 (heeft maar één deler, namelijk 1), 4 (delers: 1, 2, 4), 6 (delers: 1, 2, 3, 6).

Opdracht 12.5 Schrijf alle priemgetallen op die liggen tussen de 15 en 35.

Voorbeeld 12.4

Ontbind de volgende getallen in priemfactoren:

1. $6 = 2 \times 3$
2. $18 = 2 \times 3 \times 3 = 2 \times 3^2$
3. $24 = 2 \times 2 \times 2 \times 3 = 2^3 \times 3$

We gaan een methode bekijken hoe we op eenvoudige wijze een ontbinding in priemfactoren kunnen maken. Eerst noemen we een aantal regels, waarmee je snel kunt zien of een getal deelbaar is door de getallen 2 tot en met 10.

	Controle op deelbaarheid van een getal. Een getal is deelbaar door:
2	Als het een even getal is. Het laatste cijfer is dus een: 0, 2, 4, 6 of 8.
3	Als de som (optelling) van alle cijfers deelbaar is door 3.
4	Als de laatste twee cijfers deelbaar zijn door 4.
5	Als het laatste cijfer een 0 of een 5 is.
6	Als het getal deelbaar is door 2 en door 3.
7	Geen algemene regel. Gewoon uitproberen!
8	Als de laatste drie cijfers deelbaar zijn door 8.
9	Als de som van de cijfers deelbaar is door 9.
10	Als het laatste cijfer een 0 is.

Van de bovengenoemde regels is voor ons op dit moment alleen van belang de deelbaarheid door: 2, 3, 5 en 7 omdat dit de enige priemgetallen in deze tabel zijn.

Werkschema:
Bij het ontbinden in priemgetallen gaan we als volgt te werk.
1. Je kijkt of het getal deelbaar is door 2. Als dit zo is dan deel je <i>alle</i> factoren 2 uit het getal weg.
2. Daarna kiezen je <i>het volgende priemgetal</i> , en je kijkt of het getal deelbaar is door dit priemgetal. Als dat zo is deel je al deze priemfactoren weg.
3. Daarna starten je weer bij punt 2. Dit gaat net zolang door tot de einduitkomst 1 is.

We maken gebruik van de volgende schrijfwijze: $\text{deler} \frac{\text{getal}}{\text{uitkomst van getal : deler}}.$

Voorbeeld 12.5

Ontbindt 150 in priemfactoren:

$$\begin{array}{r} 150 \\ 2 \overline{) 150} \\ \underline{75} \\ 3 \overline{) 75} \\ \underline{25} \\ 5 \overline{) 25} \\ \underline{5} \\ 5 \overline{) 5} \\ \underline{1} \end{array}$$

Dus: $150 = 2 \times 3 \times 5 \times 5 = 2 \times 3 \times 5^2$

Ontbindt 40 in priemfactoren:

$$\begin{array}{r} 40 \\ 2 \overline{) 40} \\ \underline{20} \\ 2 \overline{) 20} \\ \underline{10} \\ 2 \overline{) 10} \\ \underline{5} \\ 5 \overline{) 5} \\ \underline{1} \end{array}$$

Dus: $40 = 2 \times 2 \times 2 \times 5 = 2^3 \times 5$

Opdracht 12.6 Ontbind in priemfactoren (op dezelfde wijze als in voorbeeld 12.5)

- a. 18
- b. 54
- c. 48
- d. 63
- e. 200
- f. 512

Voorbeeld 12.6

1. $\sqrt{50} = \sqrt{2 \times 5^2} = \sqrt{2} \times \sqrt{5^2} = 5 \times \sqrt{2} = 5\sqrt{2}$
2. $\sqrt{24} = \sqrt{2^3 \times 3} = \sqrt{2^2} \times \sqrt{2} \times \sqrt{3} = 2 \times \sqrt{2 \times 3} = 2\sqrt{6}$
3. $\sqrt{288} = \sqrt{2^5 \times 3^2} = \sqrt{2^2} \times \sqrt{2^2} \times \sqrt{2} \times \sqrt{3^2} = 2 \times 2 \times 3 \times \sqrt{2} = 12\sqrt{2}$
4. $\sqrt{18a^3b^4} = \sqrt{2 \times 3^2 \times a^2 \times a \times b^2 \times b^2} = 3 \times a \times b \times b \times \sqrt{2 \times a} = 3ab^2\sqrt{2a}$

Opdracht 12.7 Vereenvoudig de volgende wortels zoveel mogelijk:

- a. $\sqrt{200} =$
- b. $\sqrt{512} =$
- c. $\sqrt{63p^3} =$
- d. $\sqrt{54a^7b^8} =$

Voorbeeld 12.7

Als je een veelterm hebt, waarin *gelijksoortige wortels* (eigenlijk: *gelijksoortige termen*) voorkomen, dan kun je regel 6.4 gewoon toepassen.

1. $3\sqrt{a} + 5\sqrt{a} = (3+5)\sqrt{a} = 8\sqrt{a}$
2. $5\sqrt{2} + 4\sqrt{3} + 7\sqrt{2} - 6\sqrt{3} = 5\sqrt{2} + 7\sqrt{2} + 4\sqrt{3} - 6\sqrt{3} = 12\sqrt{2} - 2\sqrt{3}$
3. $\sqrt{75} + \sqrt{12} = \sqrt{3 \times 5^2} + \sqrt{2^2 \times 3} = 5\sqrt{3} + 2\sqrt{3} = 7\sqrt{3}$. Je ziet $\sqrt{75}$ en $\sqrt{12}$ kun je niet zondermeer optellen, omdat ze niet gelijksoortig zijn. Nadat je de wortels vereenvoudigd hebt, blijken ze wel gelijksoortig te zijn, zodat je ze in hun vereenvoudigde vorm wel kunt optellen.

 Let op: $\sqrt{a} + \sqrt{b} \neq \sqrt{a+b}$

Toelichting:

In voorbeeld 15.7.3 kun je dit al na gaan, maar we geven een eenvoudiger getallen voorbeeld:

$$\sqrt{9} + \sqrt{16} \neq \sqrt{9+16}$$

$$3 + 4 \neq \sqrt{25}$$

$$7 \neq 5$$

Opdracht 12.8 Bereken:

- $4\sqrt{a} + 6\sqrt{b} - 3\sqrt{a} - 8\sqrt{b} =$
- $6\sqrt{5} - 3\sqrt{7} - 8\sqrt{5} - 6\sqrt{7} =$
- $\sqrt{32} + \sqrt{50} - \sqrt{12} - 5\sqrt{18} =$

Regel 12.4 Voor alle getallen $a \geq 0$ en $b > 0$ geldt:

$$\frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}} = \sqrt{\frac{a}{b}}$$

Voorbeeld 12.8

We gaan breuken onder het wortelteken wegwerken:

- $\sqrt{1\frac{1}{4}} = \sqrt{\frac{5}{4}} = \frac{\sqrt{5}}{\sqrt{4}} = \frac{\sqrt{5}}{2} = \frac{1}{2}\sqrt{5}$
- $\sqrt{1\frac{1}{5}} = \sqrt{\frac{6}{5}} = \sqrt{\frac{6 \times 5}{5 \times 5}} = \frac{\sqrt{30}}{\sqrt{5^2}} = \frac{\sqrt{30}}{5} = \frac{1}{5}\sqrt{30}$. Om in de breuk $\frac{6}{5}$ een zuiver kwadraat in de noemer te krijgen vermenigvuldig je teller en noemer met de factor 5. (Regel 8.1)
- $\sqrt{2\frac{2}{3}} = \sqrt{\frac{8}{3}} = \sqrt{\frac{2^3 \times 3}{3 \times 3}} = \frac{\sqrt{2^2 \times 2 \times 3}}{\sqrt{3^2}} = \frac{2\sqrt{6}}{3} = \frac{2}{3}\sqrt{6}$

Opdracht 12.9 Werk de breuken onder de worteltekens weg.

- $\sqrt{1\frac{4}{9}} =$
- $\sqrt{1\frac{5}{7}} =$
- $\sqrt{3\frac{1}{5}} =$

Voorbeeld 12.9

We werken worteltekens in de noemer weg:

- $\frac{2}{\sqrt{2}} = \frac{2 \times \sqrt{2}}{\sqrt{2} \times \sqrt{2}} = \frac{2\sqrt{2}}{(\sqrt{2})^2} = \frac{2\sqrt{2}}{2} = \sqrt{2}$. Om een kwadraat in de noemer te krijgen vermenigvuldig je teller en noemer met: $\sqrt{2}$.
- $\frac{\sqrt{5}}{\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{5} \times \sqrt{3}}{\sqrt{3} \times \sqrt{3}} = \frac{\sqrt{5 \times 3}}{(\sqrt{3})^2} = \frac{\sqrt{15}}{3} = \frac{1}{3}\sqrt{15}$. Maar je had natuurlijk ook als volgt kunnen werken: $\frac{\sqrt{5}}{\sqrt{3}} = \sqrt{\frac{5}{3}} = \sqrt{\frac{5 \times 3}{3 \times 3}} = \sqrt{\frac{15}{3^2}} = \frac{\sqrt{15}}{\sqrt{3^2}} = \frac{\sqrt{15}}{3} = \frac{1}{3}\sqrt{15}$

Opdracht 12.10 Werk de wortels in de noemer weg.

- $\frac{3}{\sqrt{3}} =$
- $\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{5}} =$

Samenvattend “Vereenvoudig wortels zoveel mogelijk” betekent:



Breng zoveel mogelijk factoren buiten de wortel.



Werk alle breuken onder het wortelteken weg.



Zorg dat in de noemer van een breuk geen wortel meer staat.

Toelichting:

De laatste twee regels voer je altijd uit als er alleen getallen in de noemer staan. Als de vormen te ingewikkeld worden, dan sla je deze regels wel eens over.

Voorbeeld 12.10

In dit voorbeeld maak je gebruik van regel 4.5: $(a \times b)^n = a^n \times b^n$

$$1. (3\sqrt{5})^2 = 3^2 \times (\sqrt{5})^2 = 9 \times 5 = 45$$

$$2. (4a^3b^4\sqrt{3a})^2 = 4^2 \times (a^3)^2 \times (b^4)^2 \times (\sqrt{3a})^2 = 16 \times a^6 \times b^8 \times 3a = 48a^7b^8$$

Opdracht 12.11 Bereken:

$$a. (4\sqrt{2})^2 =$$

$$b. (a^5\sqrt{3})^2 =$$

$$c. (3p^6\sqrt{5})^2 =$$

$$d. (7a^7\sqrt{a})^2 =$$

$$e. (5b^5c^2\sqrt{2bc})^2 =$$

Voorbeeld 12.11

We gaan bijzondere producten (zie hoofdstuk 15) in combinatie met wortels uitvoeren:

$$1. (\underbrace{\sqrt{2}}_a + \underbrace{\sqrt{3}}_b)^2 = (\underbrace{\sqrt{2}}_a)^2 + 2 \cdot \underbrace{(\sqrt{2})}_a \cdot \underbrace{(\sqrt{3})}_b + (\underbrace{\sqrt{3}}_b)^2 = 2 + 2 \cdot \sqrt{6} + 3 = 5 + 2\sqrt{6}$$

$$2. (2\sqrt{5} - 3\sqrt{7})^2 = (2\sqrt{5})^2 - 2 \cdot (2\sqrt{5}) \cdot (3\sqrt{7}) + (3\sqrt{7})^2 \\ = 4 \times 5 - 2 \times 2 \times 3 \times \sqrt{5 \times 7} + 9 \times 7 = 20 - 12\sqrt{35} + 63 = 83 - 12\sqrt{35}$$

$$3. (3\sqrt{5} + 2\sqrt{7})(3\sqrt{5} - 2\sqrt{7}) = (3\sqrt{5})^2 - (2\sqrt{7})^2 = 9 \times 5 - 4 \times 7 = 45 - 28 = 17$$

$$4. (2\sqrt{3} + 3\sqrt{5})(4\sqrt{2} - 7\sqrt{6}) = 2\sqrt{3} \times 4\sqrt{2} + 2\sqrt{3} \times -7\sqrt{6} + 3\sqrt{5} \times 4\sqrt{2} + 3\sqrt{5} \times -7\sqrt{6} \\ = 8\sqrt{6} - 14\sqrt{18} + 12\sqrt{10} - 21\sqrt{30} = 8\sqrt{6} - 42\sqrt{2} + 12\sqrt{10} - 21\sqrt{30}$$

Opdracht 12.12 Bereken:

$$a. (\sqrt{7} - \sqrt{5})^2 =$$

$$b. (5\sqrt{3} + 3\sqrt{5})(5\sqrt{3} - 3\sqrt{5}) =$$

$$c. (a\sqrt{p} + b\sqrt{3q})^2 =$$

$$d. (2a^4\sqrt{3a} + 5b^3\sqrt{2b})^2 =$$

$$e. (2\sqrt{5} + 3\sqrt{2})(4\sqrt{2} - 5\sqrt{5}) =$$

$$f. (2\sqrt{3} + 3\sqrt{2})(2\sqrt{3} - 3\sqrt{2}) =$$

Voorbeeld 12.12

Je werkt de wortel in de noemer weg door gebruik te maken van regel 15.3

$(a+b)(a-b) = a^2 - b^2$. We kiezen juist deze rekenregel omdat door het kwadrateren de wortels weggewerkt worden.

$$\begin{aligned}
 1. \quad \frac{2}{1-\sqrt{2}} &= \frac{2(1+\sqrt{2})}{(1-\sqrt{2})(1+\sqrt{2})} = \frac{2+2\sqrt{2}}{1^2-(\sqrt{2})^2} = \frac{2+2\sqrt{2}}{1-2} = \frac{2+2\sqrt{2}}{-1} = \frac{2}{-1} + \frac{2\sqrt{2}}{-1} = -2-2\sqrt{2} \\
 2. \quad \frac{3-\sqrt{5}}{2+\sqrt{3}} &= \frac{(3-\sqrt{5})(2-\sqrt{3})}{(2+\sqrt{3})(2-\sqrt{3})} = \frac{3 \times 2 + 3 \times -\sqrt{3} + -\sqrt{5} \times 2 + -\sqrt{5} \times -\sqrt{3}}{2^2 - (\sqrt{3})^2} \\
 &= \frac{6-3\sqrt{3}-2\sqrt{5}+\sqrt{15}}{4-3} = 6-3\sqrt{3}-2\sqrt{5}+\sqrt{15}
 \end{aligned}$$

Opdracht 12.13 Werk de wortels weg uit de noemer.

- a. $\frac{3}{\sqrt{3}+1} =$
- b. $\frac{3+\sqrt{7}}{4-\sqrt{7}} =$
- c. $\frac{\sqrt{5}+\sqrt{3}}{\sqrt{5}-\sqrt{3}} =$

Hogere machtswortels

Behalve vierkantswortels kennen we in de wiskunde ook nog hogere machtswortels. Zo is $\sqrt[3]{8}$ (spreek uit: *de derde machtswortel van acht*) gelijk aan het getal dat tot de macht 3 verheven de waarde 8 oplevert. Dit is: 2.

Op dezelfde manier geldt:

- a. $\sqrt[3]{125} = 5$, want: $5^3 = 125$.
- b. $\sqrt[4]{81} = 3$, want: $3^4 = 81$.
- c. $\sqrt[5]{32} = 2$, want: $2^5 = 32$.

In het algemeen maken we de volgende afspraak:

Afspraak 12.2	Voor alle getallen $a \geq 0$ en $b \geq 0$ geldt: $\sqrt[n]{a} = b \Leftrightarrow b^n = a$
----------------------	---

Toelichting:

De vierkantswortel wordt ook wel *een tweede graadswortel* genoemd. In feite is $\sqrt{a} = \sqrt[2]{a}$, want er geldt: $\sqrt[2]{a} = b \Leftrightarrow b^2 = a$ en dit is wat in afspraak 12.2 staat als je voor n de waarde 2 neemt. Hoewel het een tweede machtswortel is schrijven we deze 2 **nooit** bij het wortelteken.

Ook de regels 12.1, 12.3 en 12.4 gelden voor hogere machtswortels. De vertaling in de hogere machtswortel notatie staat in de regels 12.5, 12.6 en 12.7

Regel 12.5	Voor alle getallen $a \geq 0$ geldt: $\sqrt[n]{a^n} = a$ $(\sqrt[n]{a})^n = a$
Regel 12.6	Voor alle getallen $a \geq 0$ en $b \geq 0$ geldt: $\sqrt[n]{a} \times \sqrt[n]{b} = \sqrt[n]{a \times b}$
Regel 12.7	Voor alle getallen $a \geq 0$ en $b > 0$ geldt: $\frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}} = \sqrt[n]{\frac{a}{b}}$

Toelichting:

- Als je twee hogere machtswortels vermenigvuldigt of deelt, dan moeten de machten van de wortels gelijk zijn.
- Als n een geheel getal groter of gelijk aan 2 is, dan geldt voor de vorm: $\sqrt[n]{a}$:
 - Als n een *even* getal is, dan moet a groter of gelijk aan nul zijn. De uitkomst is altijd groter of gelijk aan nul.
 - Als n een *oneven* getal is, dan mag a ook negatief zijn. Immers: $\sqrt[3]{-8} = -2$, want: $(-2)^3 = -8$.
- Ook nu beperken we ons weer door aan te nemen dat alle letters positieve getallen voorstellen.

Toelichting 2 brengt ons tot de vertaling van regel 12.2 voor hogere machtswortels.

Regel 12.8	Voor alle getallen a en voor alle gehele getallen n ($n \geq 1$) geldt: $\sqrt[2n]{a^{2n}} = a $ $\sqrt[2n+1]{a^{2n+1}} = a$
-------------------	--

Toelichting:

Bedenk dat $2n$ een *even* getal voorstelt en dat $2n+1$ een *oneven* getal voorstelt. Je zult regel 15.8 weinig gebruiken omdat we ons beperken tot letters, welke positieve getallen voorstellen.

Voorbeeld 12.13

$$\sqrt[3]{8a^5b^6} = \sqrt[3]{2^3} \times \sqrt[3]{a^3} \times \sqrt[3]{a^2} \times \sqrt[3]{b^3} \times \sqrt[3]{b^3} = 2 \times a \times \sqrt[3]{a^2} \times b \times b = 2ab^2 \sqrt[3]{a^2}$$

Opdracht 12.14 Vereenvoudig de volgende wortels zoveel mogelijk.

- $\sqrt[3]{27c^7d^{12}} =$
- $\sqrt[4]{16p^5q^{15}} =$
- $\sqrt[5]{a^{17}b^{23}c^{15}} =$

Bij het maken van de opdrachten zul je misschien al een regel(maat) hebben gezien.

$\sqrt[3]{p^{12}} = \sqrt[3]{p^3} \times \sqrt[3]{p^3} \times \sqrt[3]{p^3} \times \sqrt[3]{p^3} = p \times p \times p \times p = p^4$ in 12 zit 4 maal de 3, dit kun je vinden door uit te rekenen: $\frac{12}{3} = 4$. Het antwoord vind je sneller als je uitvoert: $\sqrt[3]{p^{12}} = p^{\frac{12}{3}} = p^4$. Dit brengt ons tot de volgende regel.

Regel 12.9 Voor alle getallen $a \geq 0$ geldt:

$$\sqrt[n]{a^m} = a^{\frac{m}{n}}$$

Toelichting:

Met de notatie: $a^{\frac{m}{n}}$ bedoelen we eigenlijk: $a^{\left(\frac{m}{n}\right)}$. De haakjes laten we altijd voor de overzichtelijkheid weg.

Voorbeeld 12.14

- $\sqrt[3]{5^{21}} = 5^{\frac{21}{3}} = 5^7$
- $\sqrt[4]{a^{20}b^{32}c^{16}} = \sqrt[4]{a^{20}} \times \sqrt[4]{b^{32}} \times \sqrt[4]{c^{16}} = a^{\frac{20}{4}}b^{\frac{32}{4}}c^{\frac{16}{4}} = a^5b^8c^4$

Opdracht 12.15 Bereken op dezelfde wijze als in voorbeeld 12.14:

- $\sqrt[5]{3^{40}} =$
- $\sqrt[4]{a^8b^{16}c^{44}} =$

Het toepassen van regel 12.9 heeft tot gevolg dat je onverwachte notaties kunt tegenkomen. We geven hiervan voorbeelden:

Voorbeeld 12.15

- $\sqrt[3]{4} = \sqrt[3]{2^2} = 2^{\frac{2}{3}}$
- $\sqrt{3} = \sqrt[2]{3^1} = 3^{\frac{1}{2}}$
- $\sqrt[4]{a^{13}} = a^{\frac{13}{4}} = a^{3\frac{1}{4}}$

Bij het uitvoeren van de deling in de exponent kunnen breuken overblijven. Een exponent, waarin een breuk staat noemen we ook *een oneigenlijke macht*. Zie in dit verband ook bladzijde: **Fout! Bladwijzer niet gedefinieerd.**, waar we 0 en negatieve getallen in de exponent zijn tegengekomen. We breiden de daar geformuleerde regel iets verder uit.



De vormen a^0 , a^{-n} en $a^{\frac{p}{q}}$ noem je oneigenlijke machten. Deze mogen standaard **nooit** in een eindantwoord voorkomen. Ze worden wel volop in tussenberekeningen gebruikt. De oneigenlijke machten dien je in de einduitkomst terug te brengen tot eigenlijke machten en wortelvormen.

Voorbeeld 12.16

Met behulp van regel 12.9 kun je gemakkelijk wortels vereenvoudigen.

1. $\sqrt[4]{a^{13}} = a^{\frac{13}{4}} = a^{3\frac{1}{4}} = a^{3+\frac{1}{4}} = a^3 \times a^{\frac{1}{4}} = a^3 \times \sqrt[4]{a} = a^3 \sqrt[4]{a}$
2. $\sqrt{32} = \sqrt[2]{2^5} = 2^{\frac{5}{2}} = 2^{2\frac{1}{2}} = 2^{2+\frac{1}{2}} = 2^2 \times 2^{\frac{1}{2}} = 2^2 \times \sqrt[2]{2^1} = 4\sqrt{2}$
3. $\sqrt[8]{a^4} = a^{\frac{4}{8}} = a^{\frac{1}{2}} = \sqrt[2]{a^1} = \sqrt{a}$
4. $\sqrt[8]{x^{26}} = x^{\frac{26}{8}} = x^{3\frac{2}{8}} = x^{3+\frac{1}{4}} = x^{3+\frac{1}{4}} = x^3 \times x^{\frac{1}{4}} = x^3 \sqrt[4]{x}$

Toelichting:

In voorbeeld 12.16 maak je gebruik van het feit dat je in een breuk, zoals: $3\frac{1}{4}$ het plusteken weglaat. In feite staat er: $3 + \frac{1}{4}$. Verder pas je regel 6.6 toe: $a^{n+m} = a^n \times a^m$ en natuurlijk regel

12.9: $a^{\frac{m}{n}} = \sqrt[n]{a^m}$.

Opdracht 12.16 Vereenvoudig de volgende wortels.

- a. $\sqrt[3]{81} =$
- b. $\sqrt[4]{a^{15}} =$
- c. $\sqrt[6]{b^{28}} =$

Voorbeeld 12.17

We gaan diverse regels uitvoeren. Ga voor jezelf na welke regel we toepassen.

1. $\sqrt{a} \times \sqrt[3]{a} = \sqrt[2]{a^1} \times \sqrt[3]{a^1} = a^{\frac{1}{2}} \times a^{\frac{1}{3}} = a^{\frac{1}{2} + \frac{1}{3}} = a^{\frac{3}{6} + \frac{2}{6}} = a^{\frac{5}{6}} = \sqrt[6]{a^5}$
2. $\frac{2}{\sqrt{2}} = \frac{2^1}{\sqrt[2]{2^1}} = \frac{2^1}{2^{\frac{1}{2}}} = 2^{1-\frac{1}{2}} = 2^{\frac{1}{2}} = \sqrt[2]{2^1} = \sqrt{2}$
3. $\frac{a^2 \sqrt[3]{a^2}}{a^5 \sqrt{a}} = \frac{a^2 \cdot a^{\frac{2}{3}}}{a^1 \cdot a^{\frac{1}{5}}} = \frac{a^{2+\frac{2}{3}}}{a^{1+\frac{1}{5}}} = \frac{a^{\frac{2\frac{2}{3}}{15}}}{a^{\frac{1\frac{1}{5}}{15}}} = a^{\frac{2\frac{2}{3}-1\frac{1}{5}}{15}} = a^{\frac{2\frac{10}{15}-1\frac{3}{15}}{15}} = a^{\frac{1\frac{7}{15}}{15}} = a^1 \cdot a^{\frac{7}{15}} = a^{15} \sqrt[15]{a^7}$

Opdracht 12.17 Bereken:

- a. $\frac{3}{\sqrt{3}} =$
- b. $\frac{\sqrt[4]{a^3}}{\sqrt{a}} =$
- c. $\sqrt[3]{a^2} \times \sqrt[5]{a^4} =$
- d. $\frac{a^3 \cdot \sqrt[4]{a}}{a \cdot \sqrt[3]{a^2}} =$

Voorbeeld 12.18

Je kunt negatieve oneigenlijke machten op de volgende manier omschrijven:

$$1. \quad a^{-\frac{2}{5}} = a^{-1+\frac{3}{5}} = a^{-1} \times a^{\frac{3}{5}} = \frac{1}{a} \times \sqrt[5]{a^3} = \frac{\sqrt[5]{a^3}}{a}$$

$$2. \quad \frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{1}{3^{\frac{1}{2}}} = 3^{-\frac{1}{2}} = 3^{-1+\frac{1}{2}} = 3^{-1} \times 3^{\frac{1}{2}} = \frac{1}{3} \sqrt{3} \quad (\text{of: } \frac{\sqrt{3}}{3})$$

$$3. \quad a^{-5\frac{1}{4}} = a^{-6+\frac{3}{4}} = a^{-6} \times a^{\frac{3}{4}} = \frac{1}{a^6} \times \sqrt[4]{a^3} = \frac{\sqrt[4]{a^3}}{a^6}$$

Toelichting:

Je herschrijft de negatieve breuk in de exponent zodanig dat je een optelling krijgt van een negatief geheel getal en een positieve breuk. Het vervolg hiervan is dat je *geen worteltekens in de noemer* van de breuk krijgt.

Opdracht 12.18 Bereken en zorg ervoor dat geen wortels in de noemer van een breuk staan:

a. $\frac{1}{\sqrt{2}} =$

b. $a^{-\frac{1}{4}} =$

c. $a^{-4\frac{2}{3}} =$

d. $\frac{a^2 \cdot \sqrt[4]{a}}{a^3 \cdot \sqrt[3]{a}} =$

Voorbeeld 12.19

$$1. \quad x^4 = 16 \Leftrightarrow x = \pm \sqrt[4]{16} = \pm 2$$

$$2. \quad x^3 = 125 \Leftrightarrow x = \sqrt[3]{125} = 5 \quad (\text{de waarde } x = -5 \text{ is géén oplossing van de vergelijking!})$$

Opdracht 12.20 Los x op uit de volgende vergelijkingen:

a. $x^5 = 32$

b. $\sqrt[3]{x} = 2$

c. $x^6 = 1$

d. $\sqrt[4]{x} = 3$