

19 Logarithmen



De bewerking, die een andere bewerking ongedaan maakt heet een *inverse bewerking*.

In het hoofdstuk 12 heb je vergelijkingen opgelost door bewerkingen ongedaan te maken met behulp van de inverse bewerking. We geven hieronder een overzicht oplossingsmethoden:

Vergelijking	Oplossing	Bewerking	Inverse bewerking
$x + 3 = 7$	$\Leftrightarrow x = 7 - 3$	Optellen	$\Leftrightarrow$ Aftrekken
$x - 6 = 10$	$\Leftrightarrow x = 10 + 6$	Aftrekken	$\Leftrightarrow$ Optellen
$4 \times x = 20$	$\Leftrightarrow x = 20 : 4$	Vermenigvuldigen	$\Leftrightarrow$ Delen
$x : 5 = 3$	$\Leftrightarrow x = 5 \times 3$	Delen	$\Leftrightarrow$ Vermenigvuldigen
$x^3 = 8$	$\Leftrightarrow x = \sqrt[3]{8}$	Machtsverheffen	$\Leftrightarrow$ Worteltrekken
$2^x = 32$	$\Leftrightarrow x = ???$	Machtsverheffen	$\Leftrightarrow$???

Merk op dat in het bovenstaande nergens een antwoord wordt gegeven. We geven alleen aan op welke wijze (via welke berekening) je de oplossing kunt vinden.

Je ziet dat er machtsverheffen twee inverse bewerkingen kent. Met een van deze inverse bewerkingen, namelijk het worteltrekken, heb je al gewerkt. Het worteltrekken wordt gebruikt om een *onbekend grondtal* in een machtsverheffing te zoeken. Om een *onbekende exponent* in een machtsverheffing te vinden kennen we tot nu toe nog geen inverse bewerking. In dit hoofdstuk onderzoeken we deze inverse bewerking. We noemen deze bewerking *logaritme nemen*.

Voor de bewerking logaritme heeft men geen mooi symbool zoals voor het worteltrekken (“ $\sqrt{}$ ”) bedacht. In plaats van een symbool gebruikt men de eerste drie letters van het woord logaritme, dus kortweg: “log”.

Let op de overeenkomst bij de volgende notaties:

$$\begin{array}{c}
 \begin{array}{ccc}
 & \downarrow & \\
 x^3 = 8 & \Leftrightarrow & x = \sqrt[3]{8} \\
 & \uparrow &
 \end{array} \\
 \\
 \begin{array}{ccc}
 & \downarrow & \\
 2^x = 32 & \Leftrightarrow & x = {}^2\log 32 \\
 & \uparrow &
 \end{array}
 \end{array}$$

We omschrijven het bovenstaande in woorden:

$$\text{grondtal}^{\text{exponent}} = \text{getal} \quad \Leftrightarrow \quad \text{grondtal} \log \text{getal} = \text{exponent}$$

Het is goed dat je het volgende steeds goed realiseert:

☞ Een logaritme is een exponent.

Toelichting:

Een gevolg van het bovenstaande is dat rekenregels, welke voor machten gelden ook van toepassing zijn voor logaritmen.

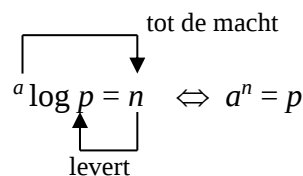
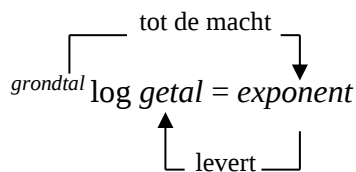
We omschrijven hetgeen we op de vorige bladzijde in woorden omschreven hebben met letters:

Afspraak 19.1 $a^n = p \underset{\text{def}}{\Leftrightarrow} {}^a\log p = n$

Toelichting:

Het symbool $\underset{\text{def}}{\Leftrightarrow}$ betekent: “is per definitie (afpraak) gelijkwaardig met”.

Met behulp van het onderstaande schema geven we aan hoe je logaritme notaties eenvoudig kunt lezen:



Opdracht 19.1 los met behulp van het bovenstaande op:

- ${}^a\log 125 = 3$
- ${}^2\log 16 = n$
- ${}^3\log p = 4$

Regel 19.1 ${}^a\log 1 = 0$

Toelichting:

Als je afspraak 19.1 toepast, dan is meteen duidelijk dat de bovenstaande regel geldt. Immers: ${}^a\log 1 = 0 \Leftrightarrow a^0 = 1$ (zie ook regel 7.3).

Regel 19.2 ${}^a\log a^n = n$

Toelichting:

- Met behulp van afspraak 19.1 en de schema's op deze bladzijde is dit meteen duidelijk.
- In het bovenstaande wordt een bewerking ("machtsverheffen") en zijn inverse ("logaritme") uitgevoerd, daardoor vind je weer de oorspronkelijke waarde " n ".

Voorbeeld 19.1

We lossen met behulp van regel 19.2 het volgende op:

1. ${}^2\log 32 = {}^2\log 2^5 = 5$
2. ${}^3\log \frac{1}{9} = {}^3\log \frac{1}{3^2} = {}^3\log 3^{-2} = -2$
3. ${}^5\log \sqrt{5} = {}^5\log \sqrt[5]{5^1} = {}^5\log 5^{\frac{1}{5}} = \frac{1}{5}$
4. ${}^2\log \frac{1}{16} \sqrt[5]{8} = {}^2\log \frac{1}{2^4} \sqrt[5]{2^3} = {}^2\log 2^{-4} \times 2^{\frac{3}{5}} = {}^2\log 2^{-4+\frac{3}{5}} = {}^2\log 2^{-\frac{32}{5}} = -\frac{32}{5}$

Opdracht 19.2 Herschrijf met exponenten:

- a. $8 = 2^{\dots}$
- b. $64 = 2^{\dots}$
- c. $9 = 3^{\dots}$
- d. $25 = 5^{\dots}$

Opdracht 19.3 Bereken zonder gebruik te maken van de rekenmachine:

- a. ${}^2\log 8 =$
- b. ${}^3\log 9 =$
- c. ${}^7\log 49 =$
- d. ${}^2\log 64 =$

Opdracht 19.4 Herschrijf met oneigenlijke exponenten:

- a. $\frac{1}{5} = 5^{\dots}$
- b. $\frac{1}{4} = 2^{\dots}$
- c. $\frac{1}{9} = 3^{\dots}$
- d. $\frac{1}{1000} = 10^{\dots}$

Opdracht 19.5 Bereken zonder gebruik te maken van de rekenmachine:

- a. ${}^2\log \frac{1}{4} =$
- b. ${}^3\log \frac{1}{27} =$
- c. ${}^7\log \frac{1}{49} =$
- d. ${}^5\log \frac{1}{25} =$

Opdracht 19.6 Herschrijf met oneigenlijke exponenten:

- a. $\sqrt{2} = 2^{\dots}$
- b. $\sqrt[4]{5^3} = 5^{\dots}$
- c. $\sqrt[5]{3} = 3^{\dots}$
- d. $\sqrt[6]{7^5} = 7^{\dots}$

Opdracht 19.7 Bereken zonder gebruik te maken van de rekenmachine:

- a. ${}^3\log \sqrt{3} =$
- b. ${}^5\log \sqrt[3]{5^2} =$
- c. ${}^7\log \sqrt[6]{7^5} =$
- d. ${}^2\log \sqrt[4]{2^3} =$

Opdracht 19.8 Herschrijf met oneigenlijke exponenten:

- a. $\sqrt[5]{9} = 3^{\cdots}$
- b. $\sqrt[4]{125} = 5^{\cdots}$
- c. $\sqrt[7]{32} = 2^{\cdots}$
- d. $\sqrt[5]{10000} = 10^{\cdots}$

Opdracht 19.9 Bereken zonder gebruik te maken van de rekenmachine:

- a. ${}^3\log \sqrt[5]{27} =$
- b. ${}^2\log \sqrt[8]{32} =$
- c. ${}^{10}\log \sqrt[6]{100000} =$
- d. ${}^5\log \sqrt[4]{125} =$

Opdracht 19.10 Herschrijf met oneigenlijke exponenten:

- a. $\frac{1}{8}\sqrt{2} = 2^{\cdots}$
- b. $\frac{1}{25}\sqrt[3]{5} = 5^{\cdots}$
- c. $\frac{1}{9}\sqrt[4]{27} = 3^{\cdots}$
- d. $\frac{1}{100}\sqrt[5]{1000} = 10^{\cdots}$

Opdracht 19.11 Bereken zonder gebruik te maken van de rekenmachine:

- a. ${}^2\log \frac{1}{4}\sqrt[5]{8} =$
- b. ${}^3\log \frac{1}{9}\sqrt{3} =$
- c. ${}^{10}\log \frac{1}{10}\sqrt[7]{1000} =$
- d. ${}^5\log \frac{1}{125}\sqrt[5]{25} =$

Opdracht 19.12 Bereken zonder gebruik te maken van de rekenmachine:

- a. ${}^5\log 25 =$
- b. ${}^{10}\log 10000 =$
- c. ${}^2\log \frac{1}{8} =$
- d. ${}^3\log 9\sqrt{3} =$
- e. ${}^{10}\log 0,001 =$
- f. ${}^7\log \frac{1}{49}\sqrt[5]{7} =$

Voorwaarden voor het gebruik van machten en logaritmen

Als je met machten en met logaritmen gaat werken, dan kun je niet in alle omstandigheden elk grondtal toestaan. We bekijken dit aan de hand van een aantal voorbeelden.

Voorbeeld 19.2

1. *Negatieve* grondtallen kunnen soms gebruikt worden, bijvoorbeeld $(-2)^3$ is zonder problemen te berekenen, maar het wordt gevaarlijker als we breuken in de exponent schrijven zoals: $(-2)^{\frac{1}{2}} = \sqrt{-2}$. Dit kun je in onze getalverzameling $\mathbb{R}$ niet berekenen. Een foutieve conclusie is dat je helemaal géén breuken kunt gebruiken, want $(-2)^{\frac{1}{3}} = \sqrt[3]{-2}$ is wel weer te berekenen. Het wel of niet kunnen berekenen hangt samen met het feit of je een even of een oneven machtswortel hebt. Hiermee ben je echter nog niet uit de problemen. Wat denk je van de notatie: $(-2)^\pi$? Is π een even of een oneven getal? Om dit soort narigheden te voorkomen besluiten we: “*we nemen nooit een negatief getal als grondtal*”
2. Het grondtal 0 is niet alleen oninteressant, maar ook gevaarlijk. Oninteressant is: $0^4 = 0$ maar wat is: $0^{-2} = \frac{1}{0^2} = \frac{1}{0} = ???$. Daarom zeggen we: “*we nemen nooit 0 als grondtal*”
3. Het grondtal 1 is oninteressant, want als je moet oplossen: $1^x = 5 \Leftrightarrow x \in \emptyset$ en het oplossen van: $1^x = 1 \Leftrightarrow x \in \mathbb{R}$. Je vindt: “geen enkele oplossing” of juist “alle oplossingen” zijn goed. Daarom zeggen we: “*we nemen nooit 1 als grondtal*”

Als we ons ontdaan hebben van alle “probleem” grondtallen, dan blijven de volgende grondtallen over: “*we kiezen alleen positieve grondtallen die ongelijk aan 1 zijn*”

Bij deze grondtallen mag je elke exponent invullen. Het antwoord van zo’n macht is *altijd een positief getal*. We gaan het een en ander in wiskundige notatie opschrijven.

 Bij het gebruik van machten en logaritmen geldt: $a^n = p \stackrel{\text{def}}{\Leftrightarrow} {}^a\log p = n$

 Hierbij gelden de volgende voorwaarden voor machten en logaritmen:
 $a > 0 \wedge a \neq 1$, je mag ook schrijven: $0 < a < 1 \vee a > 1$
 $n \in \mathbb{R}$
 $p > 0$

Opdracht 19.13 Bereken als dit mogelijk is, of geef aan waarom het foutief is:

- ${}^2\log 8 = x$
- ${}^{-2}\log 16 = x$
- ${}^2\log x = -3$
- ${}^1\log x = 1$
- ${}^2\log -8 = x$
- ${}^0\log x = 4$

Regel 19.3 $a^x = a^n \Leftrightarrow x = n$

Toelichting:

In de bovenstaande regel staat: als twee machten aan elkaar gelijk zijn en de grondtallen zijn ook gelijk, dan moeten de exponenten ook gelijk zijn. We passen deze regel toe in voorbeeld 19.3

Voorbeeld 19.3

1. ${}^4\log 32 = x \Leftrightarrow 4^x = 32 \Leftrightarrow (2^2)^x = 2^5 \Leftrightarrow 2^{2x} = 2^5 \Leftrightarrow 2x = 5 \Leftrightarrow x = 2\frac{1}{2}$
2. ${}^{\frac{1}{2}}\log 8 = x \Leftrightarrow (\frac{1}{2})^x = 8 \Leftrightarrow (2^{-1})^x = 2^3 \Leftrightarrow 2^{-x} = 2^3 \Leftrightarrow -x = 3 \Leftrightarrow x = -3$
3. ${}^{\sqrt{5}}\log 125 = x \Leftrightarrow (\sqrt{5})^x = 125 \Leftrightarrow (5^{\frac{1}{2}})^x = 5^3 \Leftrightarrow 5^{\frac{1}{2}x} = 5^3 \Leftrightarrow \frac{1}{2}x = 3 \Leftrightarrow x = 6$

Opdracht 19.14 Bereken x zonder gebruik te maken van de rekenmachine:

- a. ${}^4\log 8 = x$
- b. ${}^9\log 3 = x$
- c. ${}^{25}\log 125 = x$
- d. ${}^{100}\log 10 = x$

Opdracht 19.15 Bereken x zonder gebruik te maken van de rekenmachine:

- a. ${}^{\frac{1}{2}}\log 4 = x$
- b. ${}^{\frac{1}{3}}\log 27 = x$
- c. ${}^{\frac{1}{5}}\log 25 = x$
- d. ${}^{\frac{1}{10}}\log 1000 = x$

Opdracht 19.16 Bereken x zonder gebruik te maken van de rekenmachine:

- a. ${}^5\log 25\sqrt{5} = x$
- b. ${}^3\log 27\sqrt[5]{27} = x$
- c. ${}^4\log 16\sqrt[5]{8} = x$
- d. ${}^8\log 32\sqrt[7]{16} = x$

Opdracht 19.17 Bereken zonder gebruik te maken van de rekenmachine:

- a. ${}^9\log 27 = x$
- b. ${}^{\frac{1}{4}}\log 32 = x$
- c. ${}^{\sqrt{3}}\log 9 = x$
- d. ${}^4\log 8\sqrt{2} = x$
- e. ${}^{25}\log 5 = x$
- f. ${}^9\log 3\sqrt{3} = x$

Regel 19.4 $a^{a \log p} = p$

Toelichting:

1. Je toont dit als volgt aan: stel $a \log p = n \Leftrightarrow a^n = p$, dus als $a \log p = n$ dan geldt:
 $a^{a \log p} = a^n = p$ (q.e.d.)
2. In het bovenstaande wordt een bewerking (“logaritme”) en zijn inverse (“machtsverheffen”) uitgevoerd, daardoor vind je weer de oorspronkelijke waarde “ p ”.

Voorbeeld 19.4

1. $2^{2 \log 8} = 2^{2 \log 2^3} = 2^3 = 8$, immers: $2 \log 2^3 = 3$ (zie regel 19.2)
2. $3^{3 \log 5} = 5$
3. $8^{2 \log 5} = (2^3)^{2 \log 5} = (2^{2 \log 5})^3 = (5)^3 = 125$. Omdat je het grondtal 2 nodig hebt (zie: $2 \log 5$), herschrijf je 8 als een macht van 2. Daarna pas je het volgende toe: $(a^n)^m = (a^m)^n$. Je mag dus de exponenten van plaats verwisselen, omdat beide vormen gelijk zijn aan $a^{n \times m}$. Hierna kun je regel 19.4 toepassen.

Opdracht 19.18 Bereken:

- a. $3^{3 \log 7} =$
- b. $7^{7 \log 2} =$
- c. $5^{5 \log 3} =$
- d. $10^{10 \log 4} =$

Opdracht 19.19 Bereken:

- a. $4^{2 \log 5} =$
- b. $25^{5 \log 7} =$
- c. $8^{2 \log 3} =$
- d. $49^{7 \log 2} =$

Opdracht 19.20 Bereken:

- a. $5^{25 \log 3} =$
- b. $3^{9 \log 5} =$
- c. $2^{8 \log 7} =$
- d. $7^{49 \log 5} =$

Opdracht 19.21 Bereken:

- a. $5^{5 \log 6} =$
- b. $9^{3 \log 6} =$
- c. $2^{4 \log 3} =$

Standaard logaritme berekeningen op de rekenmachine

De rekenmachine bezit in het algemeen een knop om een $^{10}\log \dots$ te berekenen.

Dit is de  knop

 Als je **géén grondtal** vermeldt, dan bedoel je altijd het grondtal 10. In een formule betekent dit: $\log x = ^{10}\log x$

Afronden van logaritme berekeningen

Als je metingen verricht en je moet hiervan de logaritme nemen, dan pas je de volgende afrondingsregel toe:

 Als je bij *gemeten waarden* de bewerking logaritme toepast, dan rond je af op drie significante cijfers.

Voorbeeld 19.5

1. $\log 25 = 1,397940\dots \rightarrow 1,40$
2. $\log 384 = 2,584331\dots \rightarrow 2,58$

Opdracht 19.22 Bereken met behulp van de rekenmachine en rond op de juiste wijze af:

- a. $\log 324 =$
- b. $\log 731,24 =$
- c. $\log 0,0564 =$
- d. $\log 0,008234 =$

Opdracht 19.23 Bereken met behulp van de rekenmachine:

- a. $\log 23 =$
- b. $\log 780,34 =$
- c. $\log 0,0123 =$

Regel 19.5 $10^x = p \Leftrightarrow x = \log p$

Toelichting:

Dit een toepassing van afspraak 19.1: $10^x = p \stackrel{\text{def}}{\Leftrightarrow} ^{10}\log p = x \Leftrightarrow x = \log p$

Voorbeeld 19.6

1. $10^x = 278 \Leftrightarrow x = \log 278 = 2,444044\dots = 2,44$
2. $2,0 \cdot 10^x = 75 \Leftrightarrow 10^x = \frac{75}{2,0} = 37,5 \Leftrightarrow x = \log 37,5 = 1,57403\dots = 1,57$

Toelichting:

In voorbeeld 19.6.2 werk je eerst $2,0 \times$ weg om de basisvorm $10^x = p$ te krijgen.

Opdracht 19.24 Los x op:

- a. $10^x = 2,3456$
- b. $10^x = 0,0123$
- c. $10^x = 6,23815$
- d. $10^x = 4,29$

Opdracht 19.25 Los x op:

- a. $2,34 \times 10^x = 7,67$
- b. $5,231 \times 10^x = 12,45$
- c. $0,2381 \times 10^x = 0,7826$
- d. $62,67 \times 10^x = 78,967$

Opdracht 19.26 Los x op uit de volgende vergelijkingen (met behulp van de rekenmachine):

- a. $10^x = 385,12$
- b. $6,1 \cdot 10^x = 7,2$
- c. $5,127 \cdot 10^x = 3,218$

Voorbeeld 19.7

$$3,4 \cdot 10^{4,1x+5,2} = 9,7 \Leftrightarrow 10^{4,1x+5,2} = \frac{9,7}{3,4} = 2,8529 \dots$$

$$\Leftrightarrow 4,1x + 5,2 = \log 2,8529 \dots = 0,45529 \dots$$

$$\Leftrightarrow 4,1x = 0,45529 \dots - 5,2 = -4,7447 \dots$$

$$\Leftrightarrow x = \frac{-4,7447 \dots}{4,1} = -1,1572 \dots = -1,16$$

Opdracht 19.27 Los x op:

- a. $10^{5,21x} = 10,2341$
- b. $10^{2,37x} = 8,3567$
- c. $10^{-1,23x} = 0,05643$
- d. $10^{-3,65x} = 6,1237$

Opdracht 19.28 Los x op:

- a. $2,34 \times 10^{5,23x} = 8,671$
- b. $6,98 \times 10^{7,24x} = 4,789$
- c. $7,348 \times 10^{-3,12x} = 5,291$
- d. $8,524 \times 10^{3,871x} = 6,293$

Opdracht 19.29 Los x op uit de volgende vergelijkingen (met behulp van de rekenmachine):

- $10^{1,6x} = 286,34$
- $10^{2,3x+4,76} = 812,9$
- $4,8 \times 10^{3x} = 12,9$
- $9,43 \times 10^{7,2x-3,84} = 524,34$

Regel 19.6 $\log x = n \Leftrightarrow x = 10^n$

Toelichting:

- Het bovenstaande is meteen duidelijk als je de definitie van logaritme toepast.

Voorbeeld 19.8

Voor het afronden ga je als volgt te werk:

- $10^{2,345} = 221,309... \rightarrow 221$
- $10^{1,9627} = 91,76984... \rightarrow 91,8$
- $10^{-2,48} = 0,0033113... \rightarrow 0,00331 = 3,31 \cdot 10^{-3}$

Opdracht 19.30 Los x op:

- $\log x = 0,78$
- $\log x = -2,745$
- $\log x = 1,582$
- $\log x = -1,5635$

Opdracht 19.31 Los x op uit de volgende vergelijkingen (met behulp van de rekenmachine):

- $\log x = 0,120$
- $\log x = 1,8923$
- $\log x = -1,238$

Voorbeeld 19.9

- $4,2 \cdot \log x = 8,2 \Leftrightarrow \log x = \frac{8,2}{4,2} = 1,9523... \Leftrightarrow x = 10^{1,9523...} = 89,61... = 89,6$
- $2,30 \cdot \log 2,56x = 6,74 \Leftrightarrow \log 2,56x = \frac{6,74}{2,30} = 2,93043...$

$$\Leftrightarrow 2,56x = 10^{2,93043...} = 851,990...$$

$$\Leftrightarrow x = \frac{851,990...}{2,56} = 332,808... = 333$$

Toelichting:

In voorbeeld 19.9.1 werk je eerst de factor 4,2 weg en in voorbeeld 19.9.2 werk je eerst de factor 2,30 weg om de basisvorm: $\log x = n$ te krijgen.

Opdracht 19.32 Los x op:

- a. $6,482 \cdot \log x = 18,273$
- b. $8,672 \cdot \log x = 6,947$
- c. $7,2381 \cdot \log x = 4,8736$
- d. $5,23 \cdot \log x = 2,84$

Opdracht 19.33 Los x op uit de volgende vergelijkingen (met behulp van de rekenmachine):

- a. $5,322 \cdot \log x = 15,23$
- b. $23,41 \times \log 8,21x = 56,91$
- c. $7,239 \times \log(2,85x + 3,91) = 9,892$

Prioriteiten regel op de rekenmachine en afspraken over wiskundige notaties

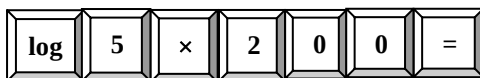
Als je wiskundige notaties zonder na te denken invoert op je rekenmachine, dan bestaat de kans dat jouw rekenmachine iets anders berekent.

De rekenmachine hanteert de volgende prioriteiten regel:

↓	Prioriteit	
	1 ^e	Uitrekenen wat tussen haakjes staat
	2 ^e	Funcities berekenen, zoals: log en 10^x
	3 ^e	Machtsverheffen ↔ Worteltrekken
	4 ^e	Vermenigvuldigen ↔ Delen
	5 ^e	Optellen ↔ Aftrekken

Voorbeeld 19.10

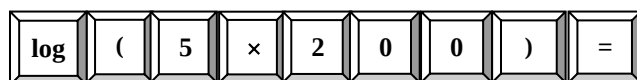
Als je in de wiskunde noteert: $\log 5a$, dan bedoel je: vermenigvuldig 5 met a en neem van het antwoord de logaritme. Als je echter op een rekenmachine intoetst ($a = 200$):



Dan zal de rekenmachine op grond van de prioriteitenregel berekenen:
 $(\log 5) \times 200 = 200 \times \log 5$

Eerst wordt de logaritme van 5 bepaald en het antwoord wordt vermenigvuldigd met 200. Om de vermenigvuldiging voorrang te geven boven de berekening van de functie moet je haakjes gebruiken.

De correcte manier van intypen is (afhankelijk van jouw rekenmachine):



Controleer dit. Het antwoord moet zijn 3, want je berekent in feite: $\log 1000$.

We zetten in een schema de wiskundige notatie uit tegen de in te toetsen notatie op de rekenmachine:

Wiskundige notatie:	Rekenmachine:
$\log a \cdot b$	$\leftrightarrow \log (a \cdot b)$
$\log \frac{a}{b}$	$\leftrightarrow \log \left(\frac{a}{b}\right)$
$\log a^n$	$\leftrightarrow \log (a^n)$
$\log^n a$	$\leftrightarrow (\log a)^n$

Opmerking:

1. $\log^2 x$ betekent dus: $(\log x)^2$
2. Let goed op de positie van alle getallen, zo betekent: $8^3 \log^5 x^4 = 8 \times ({}^3\log(x^4))^5$

Opdracht 19.34 Bereken met behulp van de rekenmachine:

- a. $\log 23,9 \times 34,5 =$
- b. $\log \frac{896,56}{90,2} =$
- c. $\log 43,89^3 =$
- d. $\log^2 56,89 =$

Opdracht 19.35 Bereken met behulp van de rekenmachine:

- a. $\log^2 3,98 \cdot 10^{-5} + \log (9,37 \cdot 10^{-4})^2 + 5,62$
- b. $\log^3 2,89 \cdot 10^{-2} + \log \sqrt{27,9} + 27 \cdot \log 77,3$

Opdracht 19.36 Los x op in de vergelijking: $5,75 \cdot 10^2 = 3,56 \cdot 10^4 \times 10^{-0,08x}$

Opdracht 19.37 Voor het berekenen van het intensiteitsniveau, symbool: L en eenheid dB

(decibel) wordt gebruik gemaakt van de formule: $L = 10 \cdot \log \frac{I}{I_0}$. In deze formule is

$I_0 = 10^{-12} \text{ W/m}^2$, de standaard geluidsintensiteit. Deze waarde is de gehoordrempel bij 1000 Hz.

- a. Voor de meeste frequenties ligt de pijngrens bij een geluidsintensiteit van $I = 1 \text{ W/m}^2$. Bereken met hoeveel decibel dit overeenkomt.
- b. Als het intensiteitsniveau $L = 80 \text{ dB}$, hoe groot is dan de geluidsintensiteit I .

Zuurgraad of pH berekeningen

In de chemie wordt veel met logaritmen gewerkt. Een van de toegepaste regels is:

Regel 19.7 $\text{pH} = -\log [\text{H}_3\text{O}^+] \Leftrightarrow [\text{H}_3\text{O}^+] = 10^{-\text{pH}}$

Toelichting:

Deze regel is een direct gevolg van de regels 19.5 en 19.6. pH heet de waterstofexponent (zuurgraad) en $[\text{H}_3\text{O}^+]$ is de concentratie H_3O^+ ionen (eenheid: mol/l)

Voorbeeld 19.11

Voor een zuur is de concentratie H_3O^+ ionen: $[\text{H}_3\text{O}^+] = 2,815 \cdot 10^{-5}$ mol/l. Bereken de zuurgraad pH. Dit gaat als volgt: $\text{pH} = -\log [\text{H}_3\text{O}^+] = -\log 2,815 \cdot 10^{-5} = 4,55$.

Voor basen en concentratie OH^- ionen gebruik je de regel:

Regel 19.8 $\text{pOH} = -\log [\text{OH}^-] \Leftrightarrow [\text{OH}^-] = 10^{-\text{pOH}}$

Opdracht 19.38

- Als $\text{pH} = 5,28$ bereken dan: $[\text{H}_3\text{O}^+]$.
- Als $[\text{H}_3\text{O}^+] = 3,781 \cdot 10^{-4}$ bereken dan: pH.
- Als $\text{pOH} = 4,57$ bereken dan: $[\text{OH}^-]$.

Opdracht 19.39 Bereken $\text{pH} = 4,2 + \log(2,00 + x^2)$ als je weet dat $x = 4,75$

Rekenregels voor logaritmen

Je berekent met behulp van de rekenmachine de volgende logaritmen:

$\log 100 = 2$ en $\log 1000 = 3$. Dit wil zeggen: $10^2 = 100$ en $10^3 = 1000$. Hiermee kun je het volgende opschrijven:

$$100.000 = 100 \times 1000 = 10^2 \times 10^3 = 10^{2+3} = 10^5 \text{ (Ga na dat: } \log 100.000 = 5\text{).}$$

Bij het vermenigvuldigen van twee getallen met hetzelfde grondtal (dit is 10) tellen we de exponenten op. Omdat de berekening alleen in de exponenten plaatsvindt is het beter om het volgende te schrijven:

$$\log 100.000 = \log(100 \cdot 1000) = \log 100 + \log 1000 = 2 + 3 = 5.$$

Lees deze regel als volgt: de exponent van 100.000 (we schrijven: $\log 100.000$) of de exponent van $100 \cdot 1000$ (we schrijven: $\log(100 \cdot 1000)$) kun je vinden door de exponent van 100 (we schrijven: $\log 100$ en dit is: 2) op te tellen bij de exponent van 1000 (we schrijven: $\log 1000$ en dit is: 3).

Hetgeen we op de vorige bladzijde gedaan hebben geldt altijd. We beschrijven dit in de volgende regel:

Regel 19.9	${}^a\log pq = {}^a\log p + {}^a\log q$
-------------------	---

Toelichting:

1. Je toont deze regel als volgt aan: stel ${}^a\log p = n \Leftrightarrow a^n = p$ en ${}^a\log q = m \Leftrightarrow a^m = q$. Nu kun je het volgende schrijven: ${}^a\log pq = {}^a\log a^n \times a^m = {}^a\log a^{n+m} = n + m = {}^a\log p + {}^a\log q$ (q.e.d.)
2. In plaats van ${}^a\log(p \times q)$ schrijven we meestal: ${}^a\log p \times q$ of: ${}^a\log pq$. We laten altijd de haakjes weg. Als we ${}^a\log(p) \times q$ willen schrijven, dan doen we dit altijd als volgt:
 $q \times {}^a\log p = q \cdot {}^a\log p = q \cdot {}^a\log p$. Je noteert dus eerst de “getallen” en daarna pas de logaritmen.
3. In plaats van ${}^a\log(p + q)$ mag je nooit schrijven: ${}^a\log p + q$, want dit betekent altijd:
 ${}^a\log(p) + q$ oftewel: $q + {}^a\log p$

Bij het delen van twee getallen met hetzelfde grondtal trekken we de exponenten van elkaar af. Dit beschrijven we in de volgende regel:

Regel 19.10	${}^a\log \frac{p}{q} = {}^a\log p - {}^a\log q$
--------------------	--

Toelichting:

Je toont deze regel als volgt aan:

Stel ${}^a\log p = n \Leftrightarrow a^n = p$ en ${}^a\log q = m \Leftrightarrow a^m = q$. Nu kun je het volgende schrijven:

$${}^a\log \frac{p}{q} = {}^a\log \frac{a^n}{a^m} = {}^a\log a^{n-m} = n - m = {}^a\log p - {}^a\log q \quad (\text{q.e.d.})$$

Bij het machtsverheffen, worden de exponenten vermenigvuldigd. Dit beschrijven we in:

Regel 19.11	${}^a\log p^m = m \times {}^a\log p$
--------------------	--------------------------------------

Toelichting:

Je toont deze regel als volgt aan:

Stel ${}^a\log p = n \Leftrightarrow a^n = p$. Nu kun je het volgende schrijven:

$${}^a\log p^m = {}^a\log (a^n)^m = {}^a\log a^{n \times m} = n \times m = m \times n = m \times {}^a\log p \quad (\text{q.e.d.})$$

Je ziet dat de rekenregels van machten en de rekenregels van logaritmen nauw met elkaar samenhangen. Hieronder staat een overzicht van de gebruikte regels:

Machten notatie:	Logaritmen notatie:
$a^n \times a^m = a^{n+m}$	$\leftrightarrow {}^a\log(p \times q) = {}^a\log p + {}^a\log q$
$\frac{a^n}{a^m} = a^{n-m}$	$\leftrightarrow {}^a\log \frac{p}{q} = {}^a\log p - {}^a\log q$
$(a^n)^m = a^{n \times m}$	$\leftrightarrow {}^a\log p^m = m \times {}^a\log p$
$\sqrt[n]{a^m} = a^{\frac{m}{n}}$	$\leftrightarrow$ Geen aparte rekenregel
$a^0 = 1$	$\leftrightarrow {}^a\log 1 = 0$
$a^{-n} = \frac{1}{a^n}$	$\leftrightarrow$ Geen aparte rekenregel
$a^n + a^m = ?$ (géén rekenregel!)	$\leftrightarrow {}^a\log(p + q) = ?$ (géén rekenregel!)

Voorbeeld 19.12 Schrijf als veelterm van logaritmen:

- ${}^2\log a^3 b^5 = {}^2\log a^3 + {}^2\log b^5 = 3 \times {}^2\log a + 5 \times {}^2\log b = 3 \cdot {}^2\log a + 5 \cdot {}^2\log b$
- $\log \frac{pq}{r} = \log pq - \log r = \log p + \log q - \log r$
- $\log \frac{pq}{r} = \log pqr^{-1} = \log p + \log q + \log r^{-1} = \log p + \log q + -1 \cdot \log r = \log p + \log q - \log r$
- ${}^3\log \frac{p}{qr} = {}^3\log p - {}^3\log qr = {}^3\log p - ({}^3\log q + {}^3\log r) = {}^3\log p - {}^3\log q - {}^3\log r$
- ${}^3\log \frac{p}{qr} = {}^3\log pq^{-1}r^{-1} = {}^3\log p + {}^3\log q^{-1} + {}^3\log r^{-1} = {}^3\log p - {}^3\log q - {}^3\log r$
- ${}^5\log \frac{a+b}{c-d} = {}^5\log(a+b) - {}^5\log(c-d)$

Toelichting:

- In voorbeeld 19.12.2 en 19.12.3 werken we dezelfde opdracht op twee manieren uit. In het laatste wordt gewerkt met oneigenlijke exponenten.
- In voorbeeld 19.12.4 en 19.12.5 werken we dezelfde opdracht op twee manieren uit. In het eerste dien je goed te letten op het gebruik van de haakjes om zo correct mogelijk de min tekens te bepalen. Als je met oneigenlijke machten werkt, dan worden de tekens bijna automatisch op de juiste manier bepaald.
- In voorbeeld 19.12.6 kun je de vormen ${}^5\log(a+b)$ en ${}^5\log(c-d)$ niet meer verder uitwerken! Ook ben je verplicht om haakjes te schrijven, want ${}^5\log a + b = b + {}^5\log a$

Opdracht 19.40 Splits de volgende logaritmen op:

- a. $\log abc =$
- b. $\log a^5 =$
- c. $\log(a+b)^4 =$
- d. $\log \frac{3a}{b} =$

Opdracht 19.41 Splits de volgende logaritmen op:

- a. ${}^2\log a^3 b^4 =$
- b. ${}^5\log \frac{ab}{c+d} =$
- c. ${}^4\log \frac{a^3 b^5}{c^7 d^6} =$
- d. ${}^3\log(2a+b)^9 =$
- e. ${}^2\log \frac{2ad}{3de} =$

Voorbeeld 19.13

Let op de uitwerking van de volgende opdracht, we werken deze op twee manieren uit:

1. $3\log a - 2\log b - 5\log c = \log a^3 - \log b^2 - \log c^5 = \log \frac{a^3}{b^2} - \log c^5 = \log \frac{a^3}{b^2 c^5}$
2. $3\log a - 2\log b - 5\log c = \log a^3 + \log b^{-2} + \log c^{-5} = \log a^3 b^{-2} c^{-5} = \log \frac{a^3}{b^2 c^5}$

Opdracht 19.42 Herleid weer tot één logaritme:

- a. $8 \cdot \log a =$
- b. $\log x + \log y + \log z =$
- c. $7 \log(c+d) =$
- d. $\log e - \log f - \log g =$

Opdracht 19.43 Herleid weer tot één logaritme:

- a. $\log a - \log b + \log c =$
- b. $3\log a + 2\log b - 4\log c =$
- c. $\log a - 2\log b - 3\log c =$
- d. $\log(a+b) - 3\log c - (\log d - 5\log e) =$

Het oplossen van logaritmische vergelijkingen

Bij het oplossen van logaritmische vergelijkingen maak je meestal gebruik van regel 19.10.

Regel 19.12 ${}^a\log x = {}^a\log p \Leftrightarrow x = p$

Toelichting:

Als twee logaritme vormen met hetzelfde grondtal gelijk zijn, dan moeten ook de vormen die achter het woordje log staan gelijk zijn.

Voorbeeld 19.14

1. $\log x = \log 6 \Leftrightarrow x = 6$
2. $\log x = \log 3 + \log 8 \Leftrightarrow \log x = \log 3 \times 8 \Leftrightarrow \log x = \log 24 \Leftrightarrow x = 24$
3. ${}^7\log x = 3 \cdot {}^7\log 5 \Leftrightarrow {}^7\log x = {}^7\log 5^3 \Leftrightarrow x = 125$
4. ${}^2\log 5 + {}^2\log x = 3 + {}^2\log 7 \Leftrightarrow {}^2\log 5x = {}^2\log 2^3 + {}^2\log 7 \Leftrightarrow$
 ${}^2\log 5x = {}^2\log 8 \times 7 \Leftrightarrow 5x = 56 \Leftrightarrow x = \frac{56}{5} = 11,2$

Toelichting:

In voorbeeld 19.14.4 wordt het getal 3 omgevormd tot een logaritme via de regel $n = {}^a\log a^n$ op de volgende wijze: $3 = {}^2\log 2^3$.

Opdracht 19.44 Los op:

- a. $\log x = \log 8 + \log 20$
- b. ${}^4\log x = 3 \cdot {}^4\log 2$
- c. ${}^5\log x = 2 - {}^5\log 4$
- d. $\log(2x + 3) = 2 \cdot \log 5 + \log 7$

Opdracht 19.45 Los op:

- a. ${}^3\log x = 2 + 4 \cdot {}^3\log a$
- b. ${}^2\log x = -2 + 5 \cdot {}^2\log a - 3 \cdot {}^2\log b$
- c. $\log(2x - 4) = \log(x + 7)$
- d. $4 + {}^2\log x = {}^2\log 4 - 2 \cdot {}^2\log 3$

Als er meer x-waarden in de vergelijking staan, dan dien je goed te letten op de voorwaarden voor een logaritme.

Voorbeeld 19.15

Los x op uit de vergelijking: $\log(x + 2) + \log(x - 4) = \log 7$

Wil de eerste logaritme bestaan, dan moet gelden: $x + 2 > 0 \Leftrightarrow x > -2$.

Wil de tweede logaritme bestaan, dan moet gelden: $x - 4 > 0 \Leftrightarrow x > 4$. Omdat beide logaritmen in de opdracht moeten bestaan moet dus gelden: $x > 4$. Dit betekent dat alle oplossingen x, waarvoor geldt: $x \leq 4$ ongeldig zijn. Je bepaalt de eventuele oplossingen als volgt:

$$\log(x+2)(x-4) = \log 7 \Leftrightarrow (x+2)(x-4) = 7 \Leftrightarrow x^2 - 2x - 8 = 7 \Leftrightarrow x^2 - 2x - 15 = 0 \Leftrightarrow (x-5)(x+3) = 0 \Leftrightarrow x = 5 \vee x = -3$$

Omdat de tweede oplossing: $x = -3$ niet voldoet aan de gestelde voorwaarde ($x > 4$) is dit geen juiste oplossing. De enige oplossing die overblijft is: $x = 5$

Opdracht 19.46 Gegeven is de vergelijking $\log(x+3) + \log(x-2) = \log 6$:

- Bereken de voorwaarde voor het bestaan van deze logaritmische vergelijking
- Los x op uit deze vergelijking

Voorbeeld 19.16

Los x op uit de vergelijking: $\log^2 x + 3\log x - 4 = 0$.

Hier staat een verkorte schrijfwijze voor de volgende vergelijking:

$(\log x)^2 + 3 \cdot \log x - 4 = 0$. Om de zaken duidelijker te maken ga je een nieuwe variabele invoeren. Je noemt “ $\log x$ ” even “ a ” (*wiskundig gezegd*: “Stel $\log x = a$ ”). Dit substitueer je in de vergelijking. Hierdoor krijg je:

$a^2 + 3a - 4 = 0$. Het is duidelijk! Je hebt te maken met een vierkantsvergelijking en via het ontbinden in factoren kun je deze oplossen:

$$a^2 + 3a - 4 = 0 \Leftrightarrow (a+4)(a-1) = 0 \Leftrightarrow a = -4 \vee a = 1$$

Het is mooi dat je a hebt gevonden, maar je moest eigenlijk x oplossen, daarom substitueren je weer $\log x$ voor a en je vindt:

$$\begin{cases} a = -4 \Leftrightarrow \log x = -4 \Leftrightarrow x = 10^{-4} = \frac{1}{10^4} \\ a = 1 \Leftrightarrow \log x = 1 \Leftrightarrow x = 10^1 = 10 \end{cases}$$

Omdat beide x waarden groter zijn dan 0 (de voorwaarde van $\log x$), zijn deze correcte oplossingen.

Opdracht 19.47 Los x op uit de vergelijking: $\log^2 x - 2\log x = 8$

Voorbeeld 19.17

Los x op uit de vergelijking: ${}^x\log(6x-5) = 2$

Omdat x als grondtal staat geldt hierdoor de voorwaarde: $x > 0 \wedge x \neq 1$. Verder geldt de voorwaarde: $6x-5 > 0 \Leftrightarrow 6x > 5 \Leftrightarrow x > \frac{5}{6}$. De oplossingen die je gaat vinden moeten aan beide voorwaarden voldoen. Dus wordt de voorwaarde: $x > \frac{5}{6} \wedge x \neq 1$ Via afspraak 19.1 vind je:

$${}^x\log(6x-5) = 2 \Leftrightarrow x^2 = 6x-5 \Leftrightarrow x^2 - 6x + 5 = 0 \Leftrightarrow (x-1)(x-5) = 0 \Leftrightarrow x = 1 \vee x = 5$$

De eerste oplossing $x = 1$ voldoet niet aan de voorwaarde (grondtal is ongelijk aan 1) en is dus niet correct. De tweede oplossing ($x = 5$) is wel juist.

Opdracht 19.48 Los x op uit de vergelijking: ${}^x\log(5x+14) = 2$

Opdracht 19.49 Los x op uit de volgende vergelijkingen:

- $\log(x-4) + \log x = \log 5$
- $\log^2 x - 3\log x - 10 = 0$
- ${}^x\log(4x+12) = 2$

Het berekenen van logaritmen met een grondtal ongelijk aan 10

Om met de rekenmachine elke logaritme met elk grondtal te kunnen uitrekenen, ga je gebruik maken van regel 19.13

Regel 19.13	${}^a\log p = \frac{{}^g\log p}{{}^g\log a}$
--------------------	--

Toelichting:

Het aantonen van de correctheid van de genoemde regel gaat als volgt:

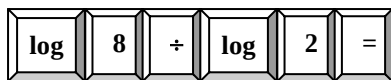
Stel ${}^a\log p = n \Leftrightarrow a^n = p$, met deze laatste vorm gaan we verder:

$$a^n = p \Leftrightarrow {}^g\log a^n = {}^g\log p \Leftrightarrow n \cdot {}^g\log a = {}^g\log p \Leftrightarrow n = \frac{{}^g\log p}{{}^g\log a}. \text{ Dit is weer } n, \text{ daarom geldt:}$$

$${}^a\log p = n = \frac{{}^g\log p}{{}^g\log a} \text{ (q.e.d.)}$$

Voorbeeld 19.18

We berekenen ${}^2\log 8 = \frac{\log 8}{\log 2}$ met behulp van de rekenmachine.



Het antwoord moet zijn 3.

De uitbreiding van regel 19.5 wordt regel 19.14 en de uitbreiding van regel 19.6 wordt 19.15

Regel 19.14	$a^x = p \Leftrightarrow x = {}^a\log p$
--------------------	--

Regel 19.15	${}^a\log x = n \Leftrightarrow x = a^n$
--------------------	--

Opdracht 19.50 Los x op uit de volgende vergelijkingen: (met rekenmachine)

- $2^x = 1024$
- $3^x = 243$
- $5^x = 15625$
- $7^x = 343$

Opdracht 19.51 Los x op uit de volgende vergelijkingen: (met rekenmachine)

- $3 \times 2^x = 1536$
- $2 \times 3^x = 1458$
- $7 \times 5^x = 875$
- $3 \times 7^x = 50421$

Opdracht 19.52 Los x op uit de volgende vergelijkingen: (met rekenmachine)

- a. $2^{x+3} = 512$
- b. $3^{x-4} = 729$
- c. $5^{2x-4} = 390625$
- d. $7^{x+4} = 16807$

Opdracht 19.53 Los x op uit de volgende vergelijkingen: (afroonden op 3 decimalen nauwkeurig)

- a. $2^x = 1500$
- b. $3^x = 20000$
- c. $5^x = 42750$
- d. $7^x = 8500$

Opdracht 19.54 Los x op uit de volgende vergelijkingen: (afroonden op 3 decimalen nauwkeurig)

- a. $3 \times 2^x = 7823$
- b. $5 \times 3^x = 4291$
- c. $7 \times 5^x = 852$
- d. $3 \times 7^x = 2534$

Opdracht 19.55 Los x op uit de volgende vergelijkingen: (afroonden op 3 decimalen nauwkeurig)

- a. $2^x = 2000$
- b. $5 \times 3^x = 188$
- c. $6 \times 5^{2x+1} = 678$

Opdracht 19.56 Los x op uit de volgende vergelijkingen:

- a. $2,53^x = 45,6$
- b. $6,27 \times 3,45^x = 4,69 \cdot 10^3$
- c. $x = {}^{5,92}\log 8,91$

Opdracht 19.57 Isoleer k uit de volgende formule: $p \cdot V^k = C$

