

kt de X -as

f .
ereken p .
twee ver-

7

Integraalrekening

men 75/76

= 2, welke

> 8 heeft,
betrekking

de grafiek
= - 1.

den, neem

men 75/76

paragraaf 7.1

paragraaf 7.2

paragraaf 7.3

paragraaf 7.4

paragraaf 7.5

paragraaf 7.6

paragraaf 7.7

paragraaf 7.8

HOE ZIT DIT HOOFDSTUK IN ELKAAR?

Primitieve functies

In deze paragraaf poneren we de stelling dat de grootte van de oppervlakte onder de grafiek van een functie berekend kan worden met behulp van zijn primitieve functie.

Bijzondere notaties zoals het sommatieteken

Bepaalde integraal
Van Riemann-som tot integraal.

Het verband tussen integralen en primitieve functies

Het verband tussen oppervlakten en integralen

Toepassingen van de bepaalde integraal
(Voorbeelden)

De primitieve functie van eenvoudige goniometrische, logaritmische en exponentiële functies

Samengestelde functies integreren
(Substitutiemethode)

paragraaf 7.1

Primitieve functies

Wat komt er in deze paragraaf aan de orde?

- Wat is een primitieve functie en wat kunnen we ermee?
- Het bepalen van eenvoudige primitieve functies.

Wat is een primitieve functie?

voorbeeld 1

Gegeven zijn de functies:

$$f(x) = \frac{1}{2}x \quad \text{en} \quad F(x) = \frac{1}{4}x^2$$

(Er geldt: $F'(x) = f(x)$)

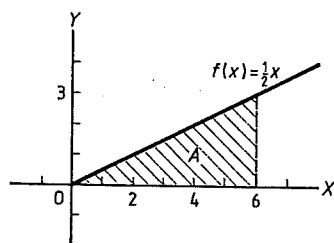


Fig. 7.1a

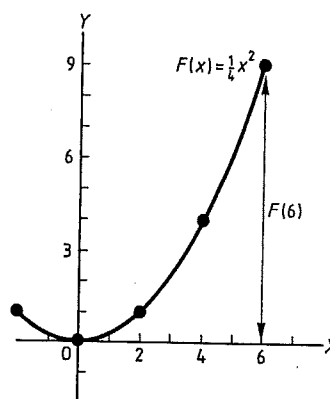


Fig. 7.1b

Voor de grootte van het gearceerde vlak geldt:

- $A = \frac{1}{2} \times 6 \times 3 = 9$

Ook geldt:

- $A = F(6) = \frac{1}{4}(6)^2 = 9$ (We tonen later aan waarom.)

voorbeeld 2

Gegeven zijn de functies:

$$f(x) = x^2 \quad \text{en} \quad F(x) = \frac{1}{3}x^3$$

(Er geldt: $F'(x) = f(x)$)

voorbeeld

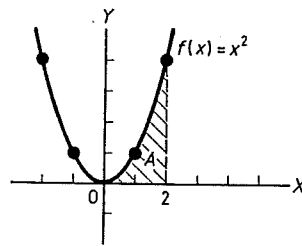


Fig. 7.2a

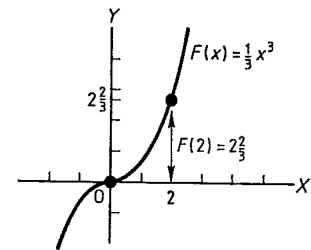


Fig. 7.2b

Voor de grootte van het gearceerde vlak geldt:

- $A = F(2) = \frac{2^2}{3}$

voorbeeld 3

Gegeven zijn de functies:

$$v(t) = 2t \quad \text{(snelheidsfunctie)}$$

$$\text{en } s(t) = t^2 \quad \text{(plaatsfunctie)}$$

(Er geldt: $s'(t) = v(t)$)

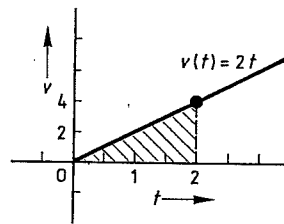


Fig. 7.3a

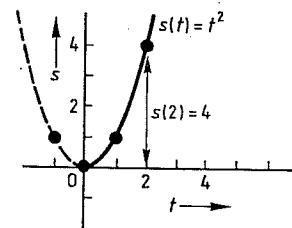


Fig. 7.3b

Voor de afgelegde weg na 2 seconden geldt (de gearceerde oppervlakte is een maat daarvoor):

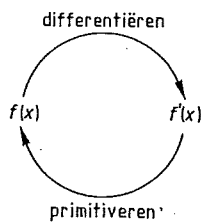
- $s = v_{\text{gem}} \cdot t = 2 \text{ m/s} \cdot 2 \text{ s} = 4 \text{ m}$

Ook geldt:

- $s(2) = 4 \text{ m}$

Uit de voorbeelden 1 t.e.m. 3 zien we dat we m.b.v. de functies $F(x)$ en $s(t)$ eenvoudig de grootte van de oppervlakten kunnen bepalen en dat die getalsgrootte ook een betekenis kan hebben, zoals de afgelegde weg in voorbeeld 3.

De functies $F(x)$ en $s(t)$ worden *primitieve functies* genoemd.



In het vorige hoofdstuk hebben we geleerd van een gegeven functie f , de afgeleide functie f' te bepalen.

Het bepalen van f' uit f noemden we: *differentiëren*.

We zeggen: f' is de *afgeleide functie* van f .

Een belangrijk onderdeel van de integraalrekening is het terugvinden van de oorspronkelijke functie f uit de gedifferentieerde functies f' .

Het bepalen van f uit f' noemen we: *primitiveren*.

We zeggen: f is een *primitieve functie* van f' .

Differentiëren en primitiveren zijn inverse bewerkingen.

Een primitieve functie – of kortweg een primitieve – van een functie wordt met een hoofdletter aangegeven:

F voor een primitieve van een functie f ;

G voor een primitieve van een functie g , enz.

Definitie:

— F is een primitieve functie van f als $F'(x) = f(x)$.

(f zelf is een primitieve functie van f' .)

Het bepalen van eenvoudige primitieve functies

voorbeeld 4

Gegeven functie f :

$$f(x) = 2x + 1$$

$$f(x) = x^3$$

$$f(x) = 3$$

$$f(x) = 0$$

$$f(x) = 0$$

$$f(x) = x^3$$

Primitieve functie F :

$$F(x) = x^2 + x$$

$$F(x) = \frac{1}{4}x^4$$

$$F(x) = 3x$$

$$F(x) = 6$$

$$F(x) = 33$$

$$F(x) = \frac{1}{4}x^4 + 4$$

Controleer de primitieve functies F door middel van $F'(x) = f(x)$.

Uit voorbeeld 4 zien we dat primitieve functies F op een constante na te bepalen zijn. Dit komt omdat de afgeleide van elke constante C nul is.

Zo heeft $f(x) = 2x + 1$ oneindig veel primitieve functies:

$$f(x) = 2x + 1 \quad \text{met} \quad F(x) = x^2 + x$$

$$F(x) = x^2 + x + 3$$

$$F(x) = x^2 + x - 10, \text{ enz.}$$

ie f , de

nden van
 f' .

n functie

opgaven

Algemeen:

$$f(x) = 2x + 1 \text{ met } F(x) = x^2 + x + C \text{ (met } C \in \mathbb{R})$$

De algemene voorstelling van de primitieve van een functie f zullen we in het vervolg steeds *de* primitieve van f noemen.

7.1 Bepaal een primitieve van de volgende functies:

- | | |
|----------------------|-----------------------------|
| a $f: f(x) = x$ | f $f: f(x) = \frac{1}{x^4}$ |
| b $f: f(x) = x^2$ | g $f: f(x) = \sqrt{x}$ |
| c $f: f(x) = x^3$ | h $f: f(x) = 2x^2$ |
| d $f: f(x) = x^4$ | i $f: f(x) = \sqrt{x^3}$ |
| e $f: f(x) = x^{-4}$ | |

7.2 Bepaal van de in opgave 7.1 gegeven functies *de* primitieve.

F :

Uit de opgaven 7.1 en 7.2 blijkt:

$$\text{Als } f: f(x) = x^n, \text{ dan } F: F(x) = \frac{1}{n+1} x^{n+1} + C$$

(met n en $C \in \mathbb{R} \wedge n \neq -1$)

EXPONENT
EÉN VERHOGEN

DE LEN DOOR
VERHOOGDE
EXPONENT

Enkele eigenschappen

voorbeeld 5

Gegeven functie f :

$$f_1(x) = x^2$$

$$f_2(x) = 2x^2$$

$$f_3(x) = 10x^2$$

Primitieve functie F :

$$F_1(x) = \frac{1}{3}x^3 + C$$

$$F_2(x) = 2 \cdot \frac{1}{3}x^3 + C$$
$$= \frac{2}{3}x^3 + C$$

$$F_3(x) = 10 \cdot \frac{1}{3}x^3 + C$$
$$= \frac{10}{3}x^3 + C$$

$= f(x)$.

nstante na
te C nul

Als $f: x \rightarrow f(x)$ als primitieve $F: x \rightarrow F(x)$ heeft, dan geldt
 $g: x \rightarrow a \cdot f(x)$ als primitieve $G: x \rightarrow a \cdot F(x)$

In woorden:

Wordt een functie met een constant getal vermenigvuldigd, dan wordt de primitieve met dezelfde constante vermenigvuldigd.

voorbeeld 6

Gegeven functie f :

$$f_1(x) = x - 3$$

$$f_2(x) = x^3$$

$$f_3(x) = 2x^2$$

$$f(x) = x^3 - 2x^2 + x - 3$$

$$(f(x) = f_2(x) - f_3(x) + f_1(x))$$

Primitieve functie F :

$$F_1(x) = \frac{1}{2}x^2 - 3x + C$$

$$F_2(x) = \frac{1}{4}x^4 + C$$

$$F_3(x) = \frac{2}{3}x^3 + C$$

$$F(x) = \frac{1}{4}x^4 - \frac{2}{3}x^3 + \frac{1}{2}x^2 - 3x + C$$

$$(F(x) = F_2(x) - F_3(x) + F_1(x))$$

Algemeen:

Als $f(x) = g(x) \pm h(x) \pm r(x)$, dan geldt
 $F(x) = G(x) \pm H(x) \pm R(x)$

opgaven

7.3 Bepaal de primitieve functie van de volgende functies:

a $f: f(x) = 1$

d $f: f(x) = 3x^2 - 1$

b $f: f(x) = x^2 + 3x + 2$

e $f: f(x) = -2x + 3x^{-2}$

c $f: f(x) = x + 1$

f $f: f(x) = x + x^2 - \frac{1}{2}x^3$

7.4 Bepaal de primitieve functie van:

a $f: f(x) = 2 - x$

e $f: f(x) = \frac{3}{x^4} + 2$

b $f: f(x) = (x - 1)^2$

f $f: f(x) = x\sqrt{x}$

c $f: f(x) = x^{-\frac{2}{3}}$

g $f: f(x) = \frac{1}{2}x^6 - 3x^2 + 2$

d $f: f(x) = \frac{x^3 + 1}{x^2}$

h $f: f(x) = \sqrt[4]{x^3}$

7.5 Bepaal voor de in opgave 7.3 gegeven functies de primitieve functie F waarvoor geldt: $F(1) = 0$.

ft, dan geldt
)

gvuldigd, dan
nigvuldigd.

F:

C

$$\frac{1}{2}x^2 - 3x + C$$

$$x) + F_1(x))$$

as:

$$3x^{-2} - \frac{1}{2}x^3$$

$$x^2 + 2$$

primitieve

paragraaf 7.2

*Wat komt er in
deze paragraaf aan
de orde?*

Bijzondere notaties

- Het sommatieteken Σ
- Het teken $[]_a^b$

Het sommatieteken Σ

voorbeeld 7

$$p_1 + p_2 + p_3 + p_4 + p_5 = \sum_{i=1}^5 p_i$$

$\sum_{i=1}^5 p_i$ betekent dus de som van de termen p_i waarbij de *sommatie-index* i achtereenvolgens gelijk is aan 1, 2, 3, 4 en 5. De getallen 1 en 5 heten de *sommatiegrenzen*.

voorbeeld 8

$$f(x_1) + f(x_2) + f(x_3) + \dots + f(x_n) = \sum_{i=1}^n f(x_i) = \sum_i f(x_i)$$

Wanneer de sommatie-index i loopt van de ondergrens 1 tot en met de (variabele) bovengrens n , wordt de sommatiegrens n vaak weggelaten.

voorbeeld 9

$$f(x_1) \cdot \Delta x + f(x_2) \cdot \Delta x + \dots + f(x_n) \cdot \Delta x = \sum f(x) \cdot \Delta x$$

Soms wordt ook de sommatie-index i weggelaten. Bij welk lettersymbool de index i hoort, is nu echter niet zonder meer duidelijk.

Het teken $[]_a^b$

$$[F(x)]_a^b = F(b) - F(a)$$

In woorden:

$[F(x)]_a^b$ is de verandering van $F(x)$ op het interval $[a, b]$.

Als afbeelding:

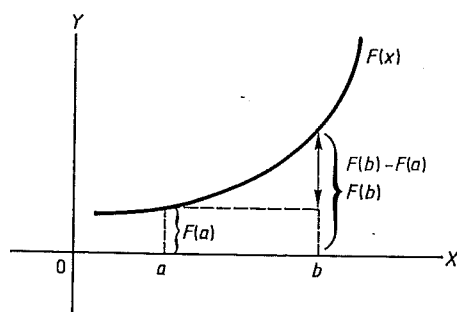


Fig. 7.4

voorbeeld 10

Gegeven:

$$F(x) = x^2$$

Gevraagd:

Bereken $[F(x)]_2^4$

Oplossing:

$$[F(x)]_2^4 = F(4) - F(2) = 16 - 4 = 12$$

opgaven

7.6 Gegeven de functie $f: F(x) = x^2 - x$.

a Bereken $[F(x)]_2^5$.

b Bereken $[F(x)]_{-2}^0$.

c Bepaal $[F(x)]_a^b$.

7.7 Gegeven: $F_1(x) = x$, $F_2(x) = x + 2$ en $F_3(x) = x + C$.

a Toon aan: $F_1'(x) = F_2'(x) = F_3'(x)$.

b Bereken $[F_1(x)]_0^2$, $[F_2(x)]_0^2$ en $[F_3(x)]_0^2$.

c Bepaal $[F_1(x)]_a^b$, $[F_2(x)]_a^b$ en $[F_3(x)]_a^b$.

d Geef het onder b en c bepaalde ook grafisch weer.

7.8 Gegeven: F en G zijn primitieve functies van de functie f op $[a, b]$.

Bewijs dat $F(x)$ en $G(x)$ dezelfde aangroeiing hebben op

$[a, b]$ ofwel: bewijs dat $[F(x)]_a^b = [G(x)]_a^b$.

(Aanwijzing: stel $F(x) = G(x) + C$, $C \in \mathbb{R}$.)

7.9 Gegeven: $F(x) = x^2 + 2x$, $G(x) = x^2 + 2x + 6$ en $O(x) = x^2 + 2x + c$.

a Toon aan: $F'(x) = G'(x) = O'(x)$.

b Bereken $[F(x)]_0^2$, $[G(x)]_0^2$ en $[O(x)]_0^2$.

c Bepaal $[F(x)]_a^b$, $[G(x)]_a^b$ en $[O(x)]_a^b$.

d Licht de antwoorden onder b en c met behulp van grafieken toe.

paragraaf 7.3

Bepaalde integraal

Wat komt er in deze paragraaf aan de orde?

- Het begrip oppervlakte.
- Het sommatieteken Σ als notatie voor de benadering van de grootte van een oppervlakte.
- Het integraalteken $\int$ als notatie voor de exacte grootte van een oppervlakte.
- De meetkundige bepaling van de grootte van een oppervlakte.

De oppervlakte

In fig. 7.5 is de grafiek getekend van een positieve functie f ($f(x) > 0$).

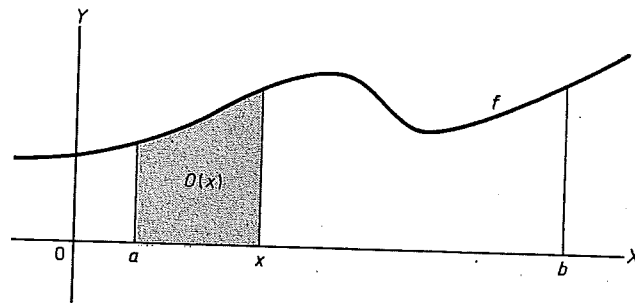


Fig. 7.5

We willen de oppervlakte van het vlakdeel ingesloten door de grafiek van f , de X -as en de lijnen $x = a$ en $x = b$ bepalen.

We zien in de figuur dat voor $x \in [a, \rightarrow)$ de grootte van de oppervlakte ingesloten door de grafiek van f , de lijn $x = a$, de X -as en de lijn door het punt $(x, 0)$ loodrecht op de X -as, wordt bepaald door de waarde van x . De relatie $O: x \rightarrow O(x)$, waarin $O(x)$ de grootte van de omschreven oppervlakte voorstelt, is dus een functie. Voor deze functie O geldt: $O(a) = 0$.

Wat we nu willen bepalen is de functiewaarde of oppervlakte $O(b)$. Daartoe verdelen we het interval $[a, b]$ in n stukjes met lengte

$\Delta x = \frac{b-a}{n}$. De deelpunten noemen we opvolgend $x_2, x_3, \dots, x_n$.

Verder stellen we $a = x_1$.

We vormen nu rechthoekjes met basis Δx en hoogte $f(x_1), f(x_2), \dots, f(x_n)$ (zie fig. 7.6). Het verschil tussen de oppervlakte van een rechthoekje op een bepaald deelinterval en de oppervlakte onder de kromme op hetzelfde deelinterval is in de figuur gearceerd. We vermelden zonder bewijs dat de gezamenlijke oppervlakte van de gearceerde vlakdeeltjes tot nul nadert als $n \rightarrow \infty$, dus als $\Delta x \rightarrow 0$. (Riemann heeft dit als eerste bewezen.)

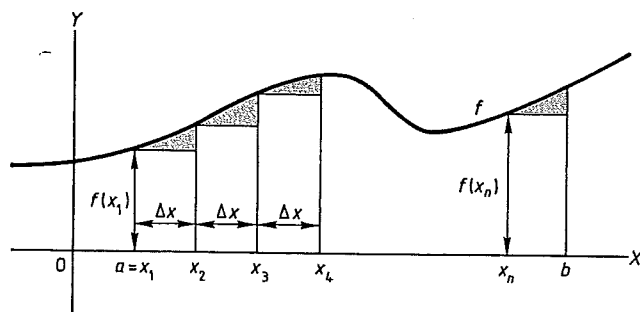


Fig. 7.6

Notatie

opgaven

Voor de som van de oppervlakten van alle rechthoekjes geldt:

$$O(b) \approx f(x_1) \cdot \Delta x + f(x_2) \cdot \Delta x + \dots + f(x_n) \cdot \Delta x$$

of:

$$O(b) \approx \sum f(x) \cdot \Delta x$$

De benaderingsfout nadert tot nul als $\Delta x \rightarrow 0$, zodat

$$O(b) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \sum f(x) \cdot \Delta x$$

Dit wordt wel de Riemann-som genoemd.

Hiervoor wordt ook genoteerd

$$O(b) = \int_a^b f(x) \cdot \Delta x$$

Voor de basiselementjes Δx wordt meestal de notatie dx gebruikt; dit geeft

$$O(b) = \int_a^b f(x) \cdot dx$$

(Uitspraak: de integraal van a tot b van $f(x) \cdot dx$)

$f(x_1), f(x_2), \dots$,
in een rechte
r de kromme
elden zonder
akdeeltjes tot
dit als eerste

Het integraalteken $\int$ heeft de vorm van een uitgerekte letter S (van som) en stelt symbolisch de som van een oneindig aantal termen voor. Integreren is sommeren!

In $\int_a^b f(x) \cdot dx$ heet:
 a de ondergrens;
 b de bovengrens;
 $f(x)$ de integrand;
 x de integratiewaarde.

De waarde voor $O(b) = \int_a^b f(x) \cdot dx$ wordt natuurlijk bepaald door de grenzen a en b .

Daarom noemt men $\int_a^b f(x) \cdot dx$ een *bepaalde integraal* of Riemann-integraal.

opgaven

dt:

7.10 Gegeven is de functie $f(x) = x$ (zie fig. 7.7).

- Wat stelt $\int_1^2 x \cdot dx$ voor?
- Wat is de grootte van $\int_1^2 x \cdot dx$?
- Wat is de grootte van $\int_0^2 f(x) \cdot dx$?
- Wat is de grootte van $\int_{-1}^2 f(x) \cdot dx$?

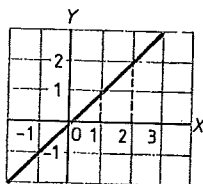


fig. 7.7

gebruikt; dit

7.11 Gegeven is fig. 7.8 waarin $\int_3^8 f(x) \cdot dx = 16$.

a $\int_0^8 f(x) \cdot dx =$

b $\int_{-4}^0 f(x) \cdot dx =$

c $\int_{-4}^8 f(x) \cdot dx =$

d $\int_{-4}^3 f(x) \cdot dx =$

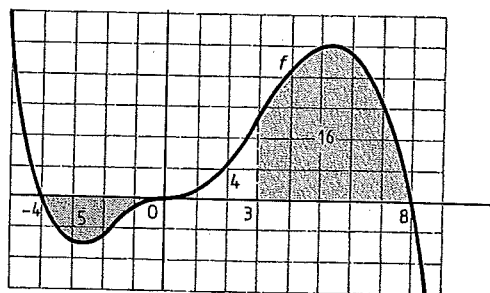


Fig. 7.8

Conclusie:

Integreren is sommeren.

Het sommeren van positieve en negatieve termen kan als uiteindelijk resultaat (uitkomst) zowel positief, nul of negatief zijn.

Het teken van de integrand $f(x)$ is hierbij belangrijk.

paragraaf 7.4

Het verband tussen integralen en primitieve functies

Wat komt er in deze paragraaf aan de orde?

- In de vorige paragraaf hebben we $\int_a^b f(x) \cdot dx$ leren kennen als een som van oneindig veel termen (Riemann-som, -integraal). De uitkomst van zo'n bepaalde integraal hebben we voor een aantal bijzondere gevallen (zie opgave 7.10 en 7.11) zelfs bepaald. In deze paragraaf zullen we aantonen dat de uitkomst van een bepaalde integraal met behulp van een primitieve functie berekend kan worden.

In paragraaf 7.3 hebben we gezien dat voor een *positieve* functie f :

$$O(b) = \int_a^b f(x) \cdot dx$$

de oppervlakte voorstelt van het vlak dat begrensd door f , de X -as en de lijnen $x = a$ en $x = b$ (zie fig. 7.5).

Omdat $O(a) = 0$ kunnen we ook schrijven:

$$\int_a^b f(x) \cdot dx = O(b) - O(a) = [O(x)]_a^b \quad (1)$$

In woorden:

De integraal $\int_a^b f(x) dx$ is dus gelijk aan de groeiing van $O(x)$ op het interval $[a, b]$.

We zullen nu aantonen dat de functie $O: x \rightarrow O(x)$ een primitieve functie van f is.

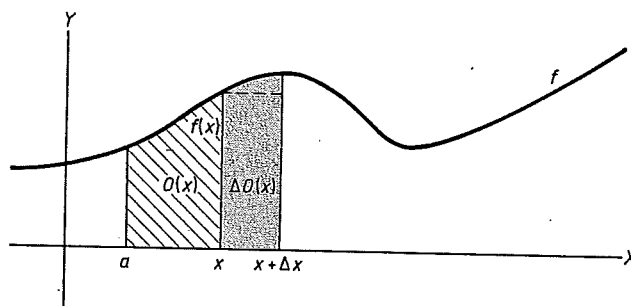


Fig. 7.9

Laten we x toenemen met Δx (zie fig. 7.9), dan neemt $O(x)$ toe met $\Delta O(x)$.

Een benadering van $\Delta O(x)$ is:

$$\Delta O(x) \approx f(x) \cdot \Delta x$$

zodat:

$$\frac{\Delta O(x)}{\Delta x} \approx f(x)$$

n kan als uit-
il of negatief
angrij.

cties

n kennen als
egraal).
oor een aantal
paald. In deze
een bepaalde
d kan worden.

Deze benadering is beter naarmate Δx kleiner is. Als $\Delta x \rightarrow 0$ nadert de fout tot nul:

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta O(x)}{\Delta x} = f(x)$$

of:

$$\frac{dO(x)}{dx} = f(x)$$

of:

$$O'(x) = f(x)$$

De functie O is dus een primitieve functie van f .

In opgave 7.8 is aangetoond dat voor elke primitieve functie F van f de aangroeiing van $F(x)$ op $[a, b]$ even groot is. In plaats van $[O(x)]_a^b$ kunnen we dus ook $[F(x)]_a^b$ schrijven in (1):

$$\int_a^b f(x) dx = [F(x)]_a^b = F(b) - F(a) \quad (2)$$

In het bijzonder zullen we onder $\int f(x) dx$ (dus zonder grenzen) het bepalen van de primitieve van f verstaan:

$$\int f(x) dx = F(x) + C$$

(F een willekeurige primitieve van f)

voorbeeld 11

Bepaal de primitieve functie F als gegeven is:

a $f(x) = x^2$

b $f(x) = 2x + 3$

Oplossing:

a $F(x) = \int f(x) dx$

$$= \int x^2 dx$$

$$= \frac{1}{3}x^3 + C$$

b $F(x) = \int f(x) dx$

$$= \int (2x + 3) dx$$

$$= x^2 + 3x + C$$

We zijn hier gewoon aan het primitiveren, weliswaar met een nieuwe notatie.

voorbeeld 12

1 $\int C \cdot f(x) dx$

2 $\int_a^b f(x) dx$

Immer

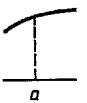


Fig. 7.1

3 $\int_a^c f(x) dx$

Immer



Fig. 7.1

$\Delta x \rightarrow 0$ nadert

ctie F van f
is van $[O(x)]_a^b$

(2)

grenzen) het

x

$3)dx$
 $+ C$

at een nieuwe

voorbeeld 12

Gegeven is de functie $f: f(x) = x$.

Gevraagd:

- Bepaal de primitieve functie van f .
- Bereken $\int f(x) dx$.
- Bereken $\int_2^4 f(x) dx$.

Oplossing:

- $F(x) = \frac{1}{2}x^2 + C$
- $\int f(x) dx = \int x dx = \frac{1}{2}x^2 + C$
- $\int_2^4 f(x) dx = \int_2^4 x dx = [\frac{1}{2}x^2 + C]_2^4 = (8 + C) - (2 + C) = 6$

Enkele eigenschappen van integralen

$$1 \quad \int C \cdot f(x) dx = C \int f(x) dx \text{ met } C \in \mathbb{R}$$

Een constante mag voor het integraal-
teken gebracht worden.

$$2 \quad \int_a^b f(x) dx = - \int_b^a f(x) dx$$

Grenzen verwisselen levert een
min-teken op.

Immers: $F(b) - F(a) = -\{F(a) - F(b)\}$ (zie fig. 7.10)

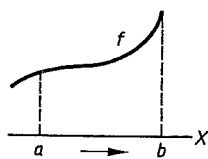


Fig. 7.10a

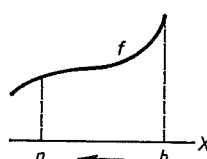


Fig. 7.10b

$$3 \quad \int_a^c f(x) dx = \int_a^b f(x) dx + \int_b^c f(x) dx$$

Splitsen voor aansluitende intervallen.

Immers: $F(c) - F(a) = \{F(b) - F(a)\} + \{F(c) - F(b)\}$ (zie fig. 7.11)

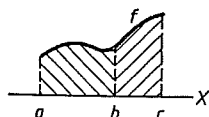


Fig. 7.11

voorbeeld 13

Bereken $\int_0^5 (1 + x^2) dx$

Oplossing:

$$\int_0^5 (1 + x^2) dx = \left[x + \frac{1}{3}x^3 \right]_0^5 = 46\frac{2}{3}$$

opgaven

7.12 Bepaal:

a $\int x dx$

b $\int 4x^3 dx$

c $\int (x^2 + 1) dx$

d $\int (1 - x^2) dx$

e $\int x^{-3} dx$

f $\int \sqrt{x} dx$

7.13 Bereken:

a $\int_0^2 x dx$

b $\int_1^3 4x^3 dx$

c $\int_2^5 (x^2 + 1) dx$

d $\int_1^4 x^{-3} dx$

e $\int_0^9 x dx$

f $\int_0^9 t dt$

paragraaf 7.5

Het verband tussen oppervlakten en integralen

Wat komt er in deze paragraaf aan de orde?

- Het oplossen van $\int_a^b f(x) dx$ is een standaardprocedure die luidt:
 - Bepaal de primitieve $F(x)$.
 - Bereken $[F(x)]_a^b = F(b) - F(a)$.
- Het resultaat van bepaald integreren is een getal $(F(b) - F(a))$. Wat is de betekenis van dat getal?
- Even en oneven functies.

voorbeeld

voorbeeld 14

Gegeven is de functie $f: f(x) = 2$.

Gevraagd:

- Bepaal de oppervlakte van het vlakdeel ingesloten door de grafiek van f , de X -as en de lijnen $x = 1$ en $x = 3$.
- Geef de waarde van $\int_1^3 f(x) dx$ aan met behulp van een grafiek van een primitieve functie van f .

voorbeeld

Oplossing:

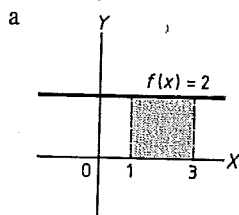
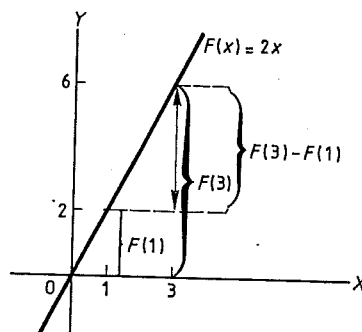


Fig. 7.12

Omdat f op $[1, 3]$ een positieve continue functie is, geldt voor de gevraagde oppervlakte:

$$A = \int_1^3 f(x) dx = \int_1^3 2 dx = [2x + C]_1^3 = (6 + C) - (2 + C) = 4$$

b We kiezen als primitieve functie van f de functie $F: F(x) = 2x$.



$$\begin{aligned} F(3) &= 6 \\ F(1) &= 2 \\ F(3) - F(1) &= 4 \end{aligned}$$

Fig. 7.13

voorbeeld 15

Gegeven is fig. 7.14.

Omdat f op $[a, b]$ een negatieve continue functie is, geldt voor de oppervlakte boven de grafiek van f en onder $[a, b]$:

$$A = \int_a^b -f(x) dx$$

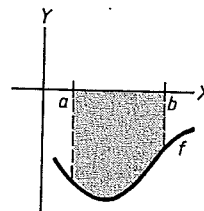


Fig. 7.14

voorbeeld 16

Gegeven is de functie $f: f(x) = x$.

Gevraagd:

- a Bereken $\int_{-2}^2 f(x) dx$.
- b Bereken de oppervlakte A van het vlak ingesloten door de grafiek van f , de X -as en de lijnen $x = -2$ en $x = 2$.

Oplossing:

a $\int_{-2}^2 f(x) dx = \int_{-2}^2 x dx = \left[\frac{1}{2}x^2 + C \right]_{-2}^2 = (2 + C) - (2 + C) = 0$

b Op $[-2, 0]$ geldt: $f(x) \leq 0$.

Op $[0, 2]$ geldt: $f(x) \geq 0$.

Zodat:

$$\begin{aligned} A &= \int_{-2}^0 -f(x) dx + \int_0^2 f(x) dx \\ &= \int_{-2}^0 -x dx + \int_0^2 x dx \\ &= \left[-\frac{1}{2}x^2 + C \right]_{-2}^0 + \left[\frac{1}{2}x^2 + C \right]_0^2 \\ &= C - (-2 + C) + (2 + C) - (C) \\ &= 2 + 2 = 4 \end{aligned}$$

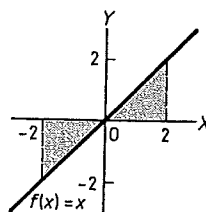


Fig. 7.15

voorbeeld 1

Conclusies:

- Integreren is sommeren.
- Het sommeren van positieve en negatieve termen kan als resultaat (uitkomst) zowel positief, nul als negatief zijn:

$$\int_a^b f(x) dx = \begin{cases} \text{positief} \\ \text{nul} \\ \text{negatief} \end{cases}$$
- Een oppervlakte is per definitie positief.
- Oppervlakten kunnen met behulp van integreren bepaald worden. De kunst is dan een goede integraal op te stellen.

opgaven

7.14 Bereken de oppervlakte van de figuur die begrensd wordt door:

- a de X -as en de lijnen $x = 0$, $x = 5$ en $y = 2x + 1$;
- b de X -as en de lijnen $x = 0$, $x = 9$ en $y = \sqrt{x}$;
- c de X -as en de lijnen $x = 1$, $x = 4$ en $y = \frac{1}{2}x^2$.

of de grafiek

$y = 0$

$-x$

Is resultaat

uld worden.

wordt door:
-1:

7.15 Gegeven de functie $f: f(x) = -x + 1$.

- Teken de grafiek van f .
- Bereken de oppervlakte van het vlakdeel ingesloten door de grafiek van f , de X -as en de lijnen $x = 1$ en $x = 3$.
- Bereken $\int_1^3 (-x + 1) dx$.

voorbeeld 17

Bereken de oppervlakte A van het vlakdeel ingesloten door de grafiek van de functie $f: f(x) = x^2 - x$, de X -as en de lijnen $x = -1$ en $x = 3$.

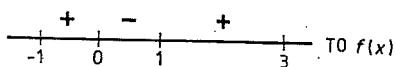
Oplossing:

Omdat er naar de oppervlakte gevraagd wordt, is een tekenoverzicht (of een grafiek) van f nodig om de juiste integraal op te kunnen stellen.

$$f(x) = 0 \Leftrightarrow x^2 - x = 0$$

$$x(x - 1) = 0$$

$$x = 0 \vee x = 1$$



$$A = \int_{-1}^0 f(x) dx + \int_0^1 -f(x) dx + \int_1^3 f(x) dx$$

ALLE INTEGRANDEN
ZIJN POSITIEF.

$$A = \int_{-1}^0 (x^2 - x) dx - \int_0^1 (x^2 - x) dx + \int_1^3 (x^2 - x) dx$$

$$\text{Als } f(x) = x^2 - x \text{ dan } F(x) = \frac{1}{3}x^3 - \frac{1}{2}x^2 + C$$

$$A = \{F(0) - F(-1)\} - \{F(1) - F(0)\} + \{F(3) - F(1)\}$$

$$A = \{C - (-\frac{5}{6} + C)\} - \{(-\frac{1}{6} + C) - C\} + \{(4\frac{1}{2} + C) - (-\frac{1}{6} + C)\}$$

$$A = C + \frac{5}{6} - C + \frac{1}{6} - C + C + 4\frac{1}{2} + C + \frac{1}{6} - C$$

$$A = 5\frac{2}{3}$$

$$\text{Ook geldt: } A = \int_{-1}^3 |f(x)| dx$$

In deze paragraaf blijkt hoe belangrijk het begrip Riemann-som is:
Is de functie $f(x) > 0$ dan levert $f(x) \cdot \Delta x$ een positieve bijdrage aan

de Riemann-som; is $f(x) < 0$ dan levert $f(x) \cdot \Delta x$ een negatieve bijdrage.

Bij oppervlakteberekeningen (een oppervlakte is positief) dient men hiermee rekening te houden (zie opgave 7.11).

opgaven

- 7.16 a Bereken $\int_0^2 (1 - x^2) dx =$
 b Bereken de oppervlakte van het vlakdeel ingesloten door de grafiek van $f: f(x) = 1 - x^2$, de X -as en de lijnen $x = 0$ en $x = 2$.
- 7.17 Gegeven de functie $f: f(x) = |x|$.
 a Teken de grafiek van f .
 b Bereken $\int_2^8 |x| dx$, $\int_{-2}^8 |x| dx$ en $\int_{-2}^2 x dx$
- 7.18 Gegeven de functies $f: f(x) = x^2$ en $g: g(x) = -x^2 + 2$.
 a Teken in één assenstelsel de grafiek van f en van g .
 b Bereken $\int_{-1}^1 f(x) dx$ en $\int_{-1}^1 g(x) dx$.
 c Geef het onder b berekende duidelijk in de grafieken aan.
 d Wat stelt $\int_{-1}^1 \{g(x) - f(x)\} dx$ voor? Bereken dat.
- 7.19 Gegeven de functies $f: f(x) = x^2 - 4$ en $g: g(x) = -x^2 - 2$.
 a Teken in één assenstelsel de grafiek van f en van g .
 b Bereken $\int_{-1}^1 f(x) dx$ en $\int_{-1}^1 g(x) dx$.
 c Geef het onder b berekende duidelijk in de grafieken aan.
 d Wat stelt $\int_{-1}^1 \{g(x) - f(x)\} dx$ voor? Bereken dat.
- 7.20 Gegeven de functies $f: f(x) = x^2 - 1$ en $g: g(x) = -x^2 + 1$.
 a Teken in één assenstelsel de grafiek van f en van g .
 b Bereken $\int_{-1}^1 f(x) dx$ en $\int_{-1}^1 g(x) dx$.
 c Geef het onder b berekende duidelijk in de grafieken aan.
 d Wat stelt $\int_{-1}^1 \{g(x) - f(x)\} dx$ voor? Bereken dat.
- 7.21 Maakt het voor het berekenen van de oppervlakte ingesloten door de grafieken van f en g in opgave 7.19 wat uit als we de functiewaarden van zowel f als g met 4 (of met 837) vermeerderen?

DE OPPE
VAN HET
DEEL TU
DE GRAF
TWEEL

voorbeeld

WELKE F
HEEFT C
INTERVA
DE GROE
FUNCTIE

negatieve bij-
f) dient men

loten door de
lijnen $x = 0$

$-x^2 + 2$.
van g .

fieken aan.
iat.

$= -x^2 - 2$.
van g .

fieken aan.
iat.

$= -x^2 + 1$.
van g .

fieken aan.
iat.

gesloten door
it als we de
net 837) ver-

DE OPPERVLAKTE
VAN HET VLAK-
DEEL TUSSEN
DE GRAFIEK VAN
TWEË FUNCTIES!

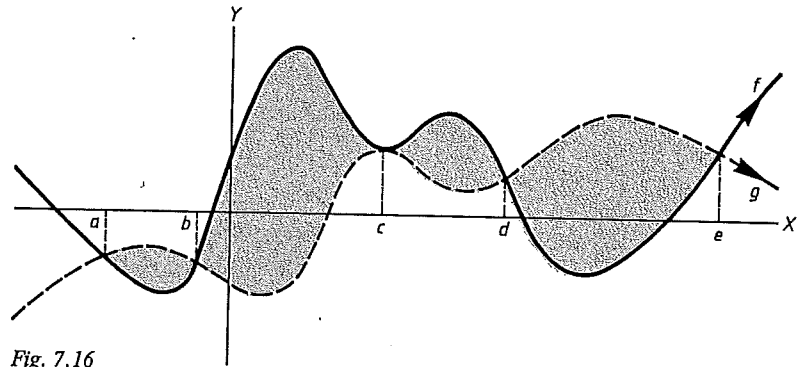


Fig. 7.16

Uit de opgaven 7.18 t.e.m. 7.21 volgt voor de oppervlakte ingesloten door de grafieken van f en g in fig. 7.16:

$$\text{Opp.} = \int_a^b \{g(x) - f(x)\} dx + \int_b^c \{f(x) - g(x)\} dx + \int_c^d \{f(x) - g(x)\} dx + \int_d^e \{g(x) - f(x)\} dx$$

Ga na dat op alle intervallen de integrand positief is.

(We kunnen het bovenstaande ook korter schrijven als:)

$$\text{Opp.} = \int_a^e |f(x) - g(x)| dx$$

voorbeeld 18

Bereken de oppervlakte ingesloten door de grafieken van $f: f(x) = -x^2 - 6x$ en $g: g(x) = x^2 - 2x - 6$.

Oplossing:

$$\begin{aligned} \bullet f(x) = g(x) &\Leftrightarrow -x^2 - 6x = x^2 - 2x - 6 \\ &\Leftrightarrow 0 = 2x^2 + 4x - 6 \\ &\Leftrightarrow 0 = x^2 + 2x - 3 \\ &\Leftrightarrow 0 = (x + 3)(x - 1) \\ &\Leftrightarrow x = -3 \vee x = 1 \end{aligned}$$

$$\bullet \left. \begin{aligned} f(0) &= 0 \\ g(0) &= -6 \end{aligned} \right\} \Rightarrow \begin{array}{c} f > g \\ -3 \quad 1 \end{array}$$

$$\begin{aligned} \bullet \text{Opp.} &= \int_{-3}^1 \{f(x) - g(x)\} dx = \int_{-3}^1 (-2x^2 - 4x + 6) dx \\ &= \left[-\frac{2}{3}x^3 - 2x^2 + 6x \right]_{-3}^1 \\ &= \left(3\frac{1}{3}\right) - (-18) \\ &= 21\frac{1}{3} \end{aligned}$$

WELKE FUNCTIE
HEEFT OP
INTERVAL $[-3, 1]$
DE GROOTSTE
FUNCTIEWAARDEN?

INTEGRAND
IS POSITIEF

opgaven

- 7.22 Bereken de grootte van het oppervlak ingesloten door de grafiek van f en g als:
- a $f: f(x) = x^2$ en $g: g(x) = x$.
 - b $f: f(x) = x^2$ en $g: g(x) = \sqrt{x}$.
 - c $f: f(x) = -x^2 + 4x - 1$ en $g: g(x) = x^2 - 4x + 5$.
 - d $f: f(x) = x^3 - x$ en $g: g(x) = 3x$.
- 7.23 Bereken de grootte van het oppervlak ingesloten door de grafiek van f , de X -as en de lijnen $x = -1$ en $x = 3$ als:
- a $f: f(x) = x^2 - x - 2$;
 - b $f: f(x) = -x^2 + 2x + 3$.
- 7.24 Bereken de oppervlakte van het vlakdeel ingesloten door de grafiek van $f: f(x) = x$, de grafiek van $g: g(x) = 2x$ en de lijn $x = 2$.

Opmerking:

Het berekenen van de oppervlakte van het vlakdeel tussen de grafiek van f en de X -as is een bijzonder geval van het bepalen van de oppervlakte van het vlakdeel tussen de grafiek van de functie f en $y = 0$.

Even en oneven functies

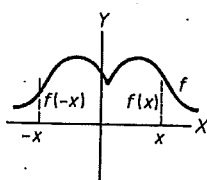


Fig. 7.17

Even functie

Als voor alle $x \in \mathbb{R}$ geldt:
 $f(-x) = f(x)$
 dan is f een *even* functie
 (zie fig. 7.17).

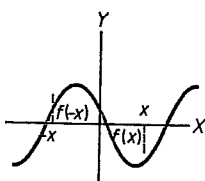


Fig. 7.18

Oneven functie

Als voor alle $x \in \mathbb{R}$ geldt:
 $f(-x) = -f(x)$
 dan is f een *oneven* functie
 (zie fig. 7.18).

Zo is: $f: f(x) = x^2 - 3$ een even functie, want:

$$\left. \begin{array}{l} f(-x) = (-x)^2 - 3 = x^2 - 3 \\ f(x) = x^2 - 3 \end{array} \right\} \Rightarrow f(-x) = f(x)$$

door de grafiek

$x + 5$.

door de grafiek
als:

sloten door de
 $= 2x$ en de lijn

issen de grafiek
n van de opper-
 f en $y = 0$.

opgaven

Zo is: $f: f(x) = x^3$ een oneven functie, want:

$$\left. \begin{array}{l} f(-x) = -x^3 \\ f(x) = x^3 \end{array} \right\} \Rightarrow f(-x) = -f(x)$$

7.25 Gegeven de functie $f: f(x) = x^2$.

Toon aan dat $\int_{-2}^2 f(x) dx = 2 \cdot \int_0^2 f(x) dx$.

7.26 Gegeven de functie $f: f(x) = x$.

a Toon aan dat f een oneven functie is.

b Bereken $\int_{-a}^a f(x) dx$. Geldt het antwoord voor elke oneven functie?

Opmerking:

Er zijn vele functies die even noch oneven zijn.

paragraaf 7.6

Toepassingen van de bepaalde integraal (voorbeelden)

voorbeeld 19

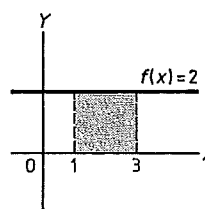


Fig. 7.19

Bereken de oppervlakte van het gekleurde vlakdeel in fig. 7.19.

Oplossing:

Omdat functie f een *constante* functie is, kan de gevraagde oppervlakte zonder integreren worden berekend:

$$\text{Opp.} = f(x) \cdot \Delta x = 2 \cdot (3 - 1) = 4$$

voorbeeld 20

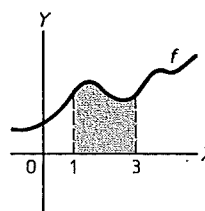


Fig. 7.20

Bepaal de oppervlakte van het gekleurde vlakdeel in fig. 7.20.

Oplossing:

De functiewaarde $f(x)$ van de functie f is nu niet constant, maar afhankelijk van de grootte van x . Voor het gekleurde vlak geldt:

$$\begin{aligned} \text{Opp.} &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n f(x_i) \cdot \Delta x \quad \text{op } [1, 3] \\ &= \int_1^3 f(x) \cdot dx \\ &= [F(x)]_1^3 = F(3) - F(1) \end{aligned}$$

voorbeeld 21

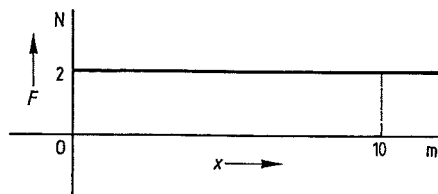


Fig. 7.21

Een massa wordt door een constante kracht $F = 2(\text{N})$ verplaatst in de richting van de kracht. De verplaatsing is $x = 10(\text{m})$. Bereken de verrichte arbeid W .

Oplossing:

Omdat de grootte van de kracht constant is, is integreren niet nodig:

$$W_{0 \rightarrow 10} = F(x) \cdot x = 2 \text{ N} \times 10 \text{ m} = 20 \text{ N} \cdot \text{m}$$

voorbeeld 22

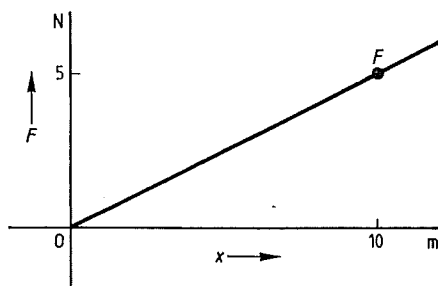


Fig. 7.22

Een massa wordt door een kracht $F(\text{N})$ verplaatst in de richting van de kracht.

De verplaatsing $x = 10(\text{m})$. Voor de kracht geldt: $F(x) = \frac{1}{2}x$, zie fig. 7.22.

Bereken de verrichte arbeid W .

Oplossing:

a Zonder integreren

$$W = F_{\text{gem}} \cdot \Delta x = \frac{5 \text{ N}}{2} \times 10 \text{ m} = 25 \text{ N} \cdot \text{m}$$

b Met integreren

$$W_{0 \rightarrow 10} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \sum F(x) \cdot \Delta x \quad \text{op } [0, 10]$$

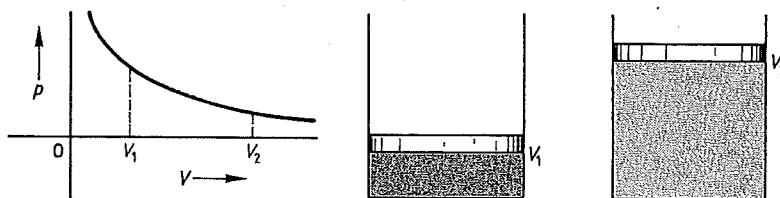
$$= \int_0^{10} F(x) \cdot dx$$

$$= \int_0^{10} \frac{1}{2}x \cdot dx$$

$$= \left[\frac{1}{4}x^2 + C \right]_0^{10} = 25 \text{ N} \cdot \text{m}$$

voorbeeld 23

Fig. 7.23



Doordat het volume van een hoeveelheid gas toeneemt van V_1 tot V_2 , neemt de druk p van het gas af. Voor de druk geldt:

$$p(V) = \frac{2}{V^2}.$$

een constante
in de richting
is $x = 10$ (m).
 $\mathcal{W}$.

t constant is, is

$$= 20 \text{ N} \cdot \text{m}$$

ht $F(N)$ ver-
racht.

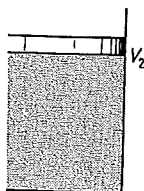
oor de kracht

V .

$$= 25 \text{ N} \cdot \text{m}$$

op $[0, 10]$

$\Gamma \cdot \text{m}$



van V_1 tot

voorbeeld 24

Bepaal de door het gas verrichte arbeid W .

Oplossing:

Voor de arbeid W , verricht door een gas, bestaan de volgende drie uitdrukkingen:

$$\bullet W = p \cdot \Delta V \quad (1)$$

$$\bullet W = p_{\text{gem}} \cdot \Delta V \quad (2)$$

$$\bullet W = \lim_{\Delta V \rightarrow 0} \Sigma p(V) \cdot \Delta V = \int p(V) \cdot dV \quad (3)$$

(1) toe te passen als p constant zou zijn (zie b.v. voorbeeld 19 en 21).

(2) toe te passen als p lineair afhankelijk is van V (zie b.v. voorbeeld 22).

(3) toe te passen als p 'willekeurig afhankelijk' is van V (zie b.v. voorbeeld 20 en 23).

Er geldt hier $p(V) = \frac{2}{V^2}$, zodat we de derde uitdrukking moeten toepassen:

$$W = \int_{V_1}^{V_2} p(V) dV = \int_{V_1}^{V_2} \frac{2}{V^2} dV = \int_{V_1}^{V_2} 2 \cdot V^{-2} dV = 2 \cdot \left[\frac{-1}{V} \right]_{V_1}^{V_2} = 2 \left(\frac{1}{V_1} - \frac{1}{V_2} \right)$$

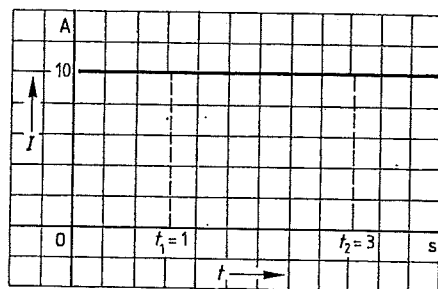


Fig. 7.24

Door een draad loopt een stroom I . Voor de lading Q die tussen de tijdstippen t_1 en t_2 door de doorsnede van de draad gaat, geldt:

$$\begin{aligned} Q &= I \cdot \Delta t \\ &= I \cdot (t_2 - t_1) \\ &= 10 \text{ A} \times 2 \text{ s} = 20 \text{ A} \cdot \text{s} \end{aligned}$$

Is de stroom afhankelijk van de tijd, bijvoorbeeld $I(t) = \sqrt{t}$, dan geldt tussen $t_1 = 1$ s en $t_2 = 4$ s:

$$Q = \int_{t_1}^{t_2} I(t) \cdot dt = \int_1^4 \sqrt{t} \cdot dt = \left[\frac{2}{3} t \sqrt{t} \right]_1^4 = \frac{14}{3} \text{ A} \cdot \text{s}$$

